Pojęcia wstępne

- **Przestrzeń próbek eksperymentu przypadkowego** to zbiór Ω wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu (dyskretna lub ciągła lub mieszana, skończona lub nieskończona)
- **Zdarzenie elementarne** – każdy możliwy wynik eksperymentu przypadkowego.
  Powtarzając eksperyment przypadkowy jako wynik otrzymujemy jedno i tylko jedno zdarzenie elementarne; zdarzenia elementarne wykluczają się wzajemnie
- **Zdarzenie** to podzbiór przestrzeni próbek.
- Szczególne zdarzenia:
  - **zdarzenie niemożliwe** – pusty podzbiór przestrzeni Ω
  - **zdarzenie pewne** – cała przestrzeń Ω

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Każdemu zdarzeniu A w przestrzeni próbek Ω przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą *P(A)* zwaną prawdopodobieństwem, tak by miała ona następujące własności:

I: $\forall A \subset \Omega \quad P(A) \geq 0$

II: *P*(Ω)=1

III: Jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ jest ciągiem rozłącznych zdarzeń to $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$

Wnioski z aksjomatów

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Dow: $\begin{cases} \bar{A} \cup A = \Omega \\ \bar{A} \cap A = \emptyset \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(\bar{A} \cup A) = 1 \\ P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) \end{cases}$

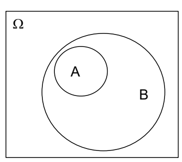
$\rightarrow \quad P(\bar{A}) + P(A) = 1 \quad \rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2. $P(A) \leq 1$
3. $P(\varphi) = 0$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dow:

$B = A \cup (\bar{A} \cap B) \quad \rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

$\rightarrow \quad P(A) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) \leq P(B)$



Wnioski z aksjomatów

5. Dla dwóch zdarzeń rozłącznych: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. Dla dwóch dowolnych zdarzeń:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dow:

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

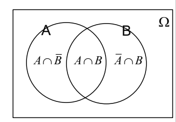
$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$

$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup P(\bar{A} \cap B)$

$P(A \cup B) = P((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup P(\bar{A} \cap B)) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Wnioski z aksjomatów

7. Dla trzech dowolnych zdarzeń:

$P(A \cup B \cup C) =$

$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Dow:

$BC \equiv B \cup C$

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup BC) = P(A) + P(BC) - P(A \cap BC) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C)) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap A \cap C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

8. Dla większej liczby zdarzeń

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \quad \right) \quad {}_{i=1}^{n} \quad {}_{1 \leq i < j \leq n} \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} \quad \right)$

(dowód indukcyjnie)

Podsumowanie: przestrzeń probabilistyczna

Formalnie eksperymenty losowe opisujemy zatem za pomocą trzech elementów:

I: Przestrzeń próbek Ω (zbiór zdarzeń elementarnych)

II: Przestrzeń zdarzeń losowych: zbiór podzbiorów przestrzeni Ω próbek z dołączonym zbiorem pustym (σ-ciało)

III: funkcja prawdopodobieństwa P(A)

np. obliczane poprzez (klasyczna definicja prawdopodobieństwa) ze wzoru

(ćwiczenia)

Przypisywanie prawdopodobieństwa zdarzeniom:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa $P(A) \equiv \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

gdzie $\overline{\overline{A}}$ to ilość równoprawdopodobnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A,

zaś $\overline{\overline{\Omega}}$ to ilość wszystkich zdarzeń elementarnych w przestrzeni Ω.

Obliczamy np. kombinatorycznie lub drzewkiem

Przypisywanie prawdopodobieństwa zdarzeniom - przykład

Przykład: W urnie znajdują się dwie kule białe i trzy czarne. Wybieramy losowo dwie kule bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie wyciągnięte kule będą tego samego koloru?

B – zdarzenie: wyciągnięto kulę białą (w jednym losowaniu)

C – zdarzenie: wyciągnięto kulę czarną (w jednym losowaniu)

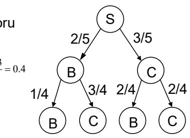
BB – zdarzenie: wyciągnięto dwie kule białe

CC - zdarzenie: wyciągnięto dwie kule czarne

KK - zdarzenie: wyciągnięto dwie kule tego samego koloru

I sposób:

$$P(KK)=P(BB\cup CC)=P(BB)+P(CC)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{\frac{2!}{2!(2-2)!}+\frac{3!}{2!(3-2)!}}{\frac{5!}{2!(5-2)!}}=\frac{1+3}{10}=0.4$$

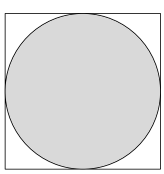


II sposób (metoda drzewka):

$$P(KK)=P(BB\cup CC)=P(BB)+P(CC)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{20}+\frac{6}{20}=0.4$$

Prawdopodobieństwo geometryczne

Prawdopodobieństwo geometryczne – miarą ilość zdarzeń elementarnych odpowiadających zdarzeniu A i przestrzeni zdarzeń Ω są pola (objętości) odpowiednich figur (brył) geometrycznych (np. wyznaczenie liczby π, igła Buffona).



$$P_{kwadratu}=4R^2$$
$$P_{kola}=\pi R^2$$
$$P(trafienia)=\frac{\pi R^2}{4R^2}=\frac{\pi}{4}$$
$$P(trafienia)=\frac{N_{trafień}}{N_{prób}}$$
$$\rightarrow \quad \pi=\frac{4N_{trafień}}{N_{prób}}$$

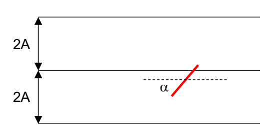
Igła, a w zasadzie patyczek, Buffona

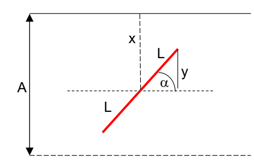
Rzucamy patyczkiem o długości 2L na podłogę z desek (nieskończenie długich). Odległość pomiędzy deskami wynosi 2A, zakładamy L<A.
Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia: losowo rzucony patyczek przetnie krawędź desek ?

Do opisu położenia patyczka używamy dwóch zmiennych:

X – odległość środka patyczka do najbliższej krawędzi powyżej środka patyczka.

α – kąt (jak na rys.)



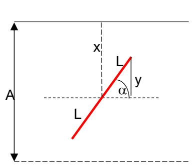


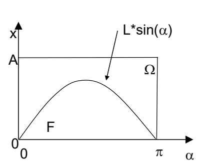
Igła, a w zasadzie patyczek, Buffona

Rozważmy sytuację $0<x<A$, $0<\alpha<\pi$

Cała przestrzeń W: prostokąt o wymiarach A*π

Przecięcie krawędzi zajdzie dla $x<L\sin(\alpha)$ ($y= L\sin(\alpha)$)





$$F=\int_0^{\pi} l\cdot\sin(\alpha)\,d\alpha=-l\cdot\cos(\alpha)\Big|_0^{\pi}=-l\cdot(-1-1)=2l$$

$$\overline{\overline{\Omega}}=A\cdot\pi$$

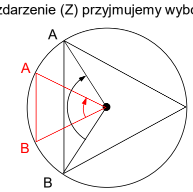
$$P(przecięcie\ krawędzi)=\frac{F}{\overline{\overline{\Omega}}}=\frac{2l}{A\cdot\pi}$$

Co stanie się jeżeli dopuścimy -A<x<A ?

Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie I:
Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór kąta na którym oparta jest cięciwa

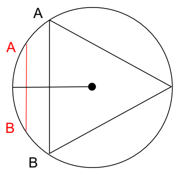


$$\Omega=[0,\pi] \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{\Omega}}=\pi$$
$$Z=\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right] \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{Z}}=\frac{\pi}{3}$$
$$P(Z)=\frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{1}{3}$$

Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie II:
Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór odległości środka okręgu od cięciwy



$$\Omega = [0, R=1] \;\rightarrow\; \overline{\overline{\Omega}} = 1$$

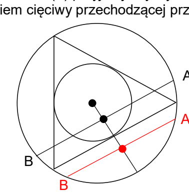
$$Z = \left[0, \frac{1}{2}\right] \;\rightarrow\; \overline{\overline{Z}} = \frac{1}{2}$$

$$P(Z) = \frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie III:
Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór punktu wewnątrz koła, który będzie środkiem cięciwy przechodzącej przez punkt i prostopadłej do promienia



$$\Omega = K(0,1) \;\rightarrow\; \overline{\overline{\Omega}} = \pi \cdot 1^2$$

$$Z = K\left(0, \frac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; \overline{\overline{Z}} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(Z) = \frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Sposób losowania jest ważny ! Różne sposoby nie są równoważne !

Prawdopodobieństwo warunkowe

Sytuacja: A,B – to dwa zdarzenia w przestrzeni próbek Ω związanej z eksperymentem E, P(B)>0. W wyniku przeprowadzenia eksperymentu E stwierdzamy, że zaszło zdarzenie B.

Prawdopodobieństwo warunkowe to liczba

$$\boxed{P(A \mid B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0}$$

Powyższa definicja jest zgodna z definicją aksjomatyczną prawdopodobieństwa.

Odpowiada ona prawdopodobieństwu zdarzenia A w przestrzeni próbek ograniczonej do zdarzenia B.

Zgodność z aksjomatami

- Aksjomat I ($P(A) \geq 0$)

  $P(A \mid B) \geq 0$ gdyż $P(A \cap B) \geq 0 \wedge P(B) > 0$
- Aksjomat II (*P(Ω)*=1), teraz *B* jest przestrzenią próbkowania

  $P(B \mid B) = 1$ gdyż $P(B \mid B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
- Aksjomat III (A_k rozłączne: $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$)

$$P((\bigcup_k A_k) \mid B) = \sum_k P(A_k \mid B) \quad \text{gdyż} \quad P((\bigcup_k A_k) \mid B) =$$

$$= \frac{P((\bigcup_k A_k) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_k (A_k \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_k P(A_k \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \sum_k \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_k P(A_k \mid B)$$

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

$$\boxed{P(A \mid B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0}$$

- Każde prawdopodobieństwo jest warunkowe

  $P(A) = P(A \mid \Omega)$
- $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \mid B) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- $B \subset A \Rightarrow P(A \mid B) = 1$
- $P(A \mid B) > P(A) \Rightarrow P(B \mid A) > P(B)$
- Nie ma zależności pomiędzy wartościami P(A) i P(A|B).
- Można budować bardziej skomplikowane relacje.

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A \mid B) > P(A) \Rightarrow P(B \mid A) > P(B)$$

Dow:

$$P(A \mid B) > P(A) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A \mid B)}{P(A)} > 1$$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

$$P(A \mid B) = P(A) \cdot \frac{P(B \mid A)}{P(B)}$$

$$\underbrace{\frac{P(A \mid B)}{P(A)}}_{>1} = \frac{P(B \mid A)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(B \mid A)}{P(B)} > 1 \quad \Rightarrow \quad P(B \mid A) > P(B)$$

Partycja przestrzeni próbek

Zbiór zdarzeń B_k k=1,2,…,n tworzy partycję przestrzeni próbek Ω jeżeli:

I: $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \phi$

II: $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$

np. zdarzenie A i przeciwne do niego zdarzenie Ω\A tworzą partycję przestrzeni Ω.

Zał: zbiory $B_1,\ldots,B_n$ tworzą partycje przestrzeni Ω, $\forall i : P(B_i) > 0$

a zdarzenie A$\subset\Omega$. Wtedy zachodzi **reguła całkowitego prawdopodobieństwa**:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)}$$

Wzór Bayesa

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego

$P(A \cap B) = P(A \mid B) P(B)$ dla $P(B) > 0$

$P(A \cap B) = P(B \mid A) P(A)$ dla $P(A) > 0$

Łącznie otrzymujemy **wzór Bayesa**

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) P(B)}{P(A)}}$$

Stosując powyższe dla $B=B_k$ tworzącego partycję przestrzeni Ω dostajemy

$$\boxed{P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_k) P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)}}$$

Wzór Bayesa

Prawdopodobieństwo *a priori* – prawdopodobieństwo zdarzenia przed wprowadzeniem dodatkowej informacji
Prawdopodobieństwo *a posteriori* – prawdopodobieństwo zdarzenia po wprowadzeniu dodatkowej informacji

Przykłady:

I. Losowanie kul z urny
II. Test medyczny (ćwiczenia)

Przykład: Losowanie kul

W urnie jest 6 kul, białe i czarne (co najmniej jedna biała i co najmniej jedna czarna). Ile jest kul białych, a ile czarnych ?

Niech M_i – układ z i kulami czarnymi w urnie

A priori $P(M_i)$=1/5=0.2

Losujemy dwie kule i obie okazują się białe (zdarzenie BB).
Jak teraz oszacujemy $P(M_i)$?

$$P(M_i \mid BB) = \frac{P(BB \mid M_i) \cdot P(M_i)}{P(BB)}$$

ale $P(BB \mid M_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{6} = 0.667$

$P(BB \mid M_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = 0.4$

$P(BB \mid M_3) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = 0.2$

$P(BB \mid M_4) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = 0.067$

$P(BB \mid M_5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = \frac{0}{30} = 0$

$\rightarrow \; P(BB) = \sum_i P(BB \mid M_i) \cdot P(M_i) =$

$= 0.667 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 + \ldots \qquad = 0.2668$

Przykład: Losowanie kul cd

Zatem prawdopodobieństwa a posteriori

$$P(M_i \mid BB) = \frac{P(BB \mid M_i) \cdot P(M_i)}{P(BB)}$$

$P(M_1 \mid BB) = \frac{0.667 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.50$

$P(M_2 \mid BB) = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.30$

$P(M_3 \mid BB) = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.15$

$P(M_4 \mid BB) = \frac{0.067 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.05$

$P(M_5 \mid BB) = \frac{0 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.00$

- Prawdopodobieństwa a posteriori są różne od tych a priori
- Prawdopodobieństwa są różne dla różnych układów początkowych M_i
- Niektóre układy zostały wykluczone