

Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 5

1. Egzaminator zadaje studentowi kolejno pytania. Prawdopodobieństwo udzielenia dobrej odpowiedzi na każde z pytań wynosi po 90%. Egzamin jest przerywany w chwili, gdy student nie umie odpowiedzieć na zadane pytanie. Podać rozkład zmiennej losowej X - liczby pytań zadanych przez egzaminatora. Podać najbardziej prawdopodobną liczbę zadanych pytań i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X .

Wskazówka: suma szeregu geometryczno-arytmetycznego dana jest wzorem:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a + kd)r^k = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2} \text{ dla } |r| < 1, r, d, a \text{ to stałe.}$$

2. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona o parametrze λ . Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y = 3X$.
3. Na płaszczyźnie (x, y) w punkcie o współrzędnych $(0, -1)$ znajduje się armata. Lufa armaty znajduje się w płaszczyźnie (x, y) i może obracać się wokół osi równoległej do osi z . Kąt θ pomiędzy kierunkiem lufy armatniej a osią y , przy którym następuje wystrzał wybiera się losowo z przedziału $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ zgodnie z rozkładem jednostajnym ($f(\theta) = 1/\pi$). Znajdź gęstość prawdopodobieństwa punktów przecięcia się linii strzału z osią x . Pocisk porusza się po linii prostej.
4. Wykazać, że jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z parametrami równymi odpowiednio $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$, to zmienna losowa $Z=X+Y$ ma również rozkład Poissona o parametrze $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.
5. Zmienna losowa X ma rozkład jednorodny w przedziale $[0,1]$. Zmienna losowa $Y=\max(X, \frac{1}{2})$. Proszę znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej losowej Y .

6. Zadanie komputerowe dla chętnych, aspirujących do podwyższenia oceny z całości kursu

Zmienna losowa X , opisująca długość odcinka, ma rozkład jednorodny na przedziale $(0,2)$.

a) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa pól kwadratów o bokach o długości X .

b) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa objętości sześcianów o bokach o długości X .

c) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa objętości n -wymiarowych sześcianów o bokach o długości X .

Zadanie proszę rozwiązać analitycznie (korzystając ze wzoru na wyznacznik funkcji gęstości prawdopodobieństwa funkcji zmiennej losowej o znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa) oraz numerycznie (narysować unormowany histogram objętości obliczonych na podstawie wylosowanych długości X). Przedstawić na jednym rysunku otrzymany histogram i wynik analityczny, osobno dla $n=2,3,4,5$ i 20.

W ogólnym przypadku c) sprawdzić normalizację rozkładu i obliczyć wartość oczekiwaną n -wymiarowej objętości (zmienna Y). Jakie będzie położenie $E(Y)$ względem prawej granicy zakresu wartości Y w funkcji n ?

7. Gęstość prawdopodobieństwa prędkości (długość wektora prędkości) atomów w klasycznej gazie opisywana jest rozkładem Maxwella:

$$f(v) = Cv^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right], \quad v \geq 0,$$

gdzie m to masa atomu, k - stała Boltzmannna ($k=1.380658 \times 10^{-23} JK^{-1}$), T - temperatura w skali bezwzględnej. Oczywiście $f(v) \equiv 0$ dla ujemnych v . Proszę znaleźć:

- (a) stałą normalizacyjną C
- (b) średnią wartość prędkości atomów $E(v)$
- (c) modę rozkładu prędkości (wartość prędkości, dla której funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma maximum)
- (d) funkcję gęstości prawdopodobieństwa energii kinetycznej atomów $f(\epsilon)$ ($\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$)
- (e) średnią energię kinetyczną atomów $E(\epsilon)$
- (f) modę rozkładu energii kinetycznej