- Dzisiaj pojawią się zagadnienia na trzecią kartkówkę z wykładu.
- Za tydzień dwa wykłady:
12:00-13:30 oraz 14:15-15:45

Wielowymiarowe zmienne losowe (wektory losowe)

- Syt. Eksperyment losowy E, związana z nim przestrzeń próbek S
- **n-wymiarowy wektor losowy** $\vec{X}$ to funkcja, która każdemu elementowi s należącemu zbioru S przyporządkowuje wektor n liczb rzeczywistych ($X_1(s)$, $X_2(s)$,…,$X_n(s)$) (n zmiennych losowych),
- Np. Losujemy punkt na płaszczyźnie $X_1(s)=x$,$X_2(s)=y$
- Nie ma związku pomiędzy wymiarem elementu w S (czyli liczbą zmiennych potrzebnych do opisania wyniku eksperymentu) a wymiarem wektora losowego $\vec{X}$.

  np. $\vec{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$:
$$X_1(s)=x_a, X_2(s)=y_a, X_3(s)=x_a+y_a, X_4(s)=sign(x_a)$$
- W dalszym ciągu ograniczymy się do n=2

Łączny rozkład prawdopodobieństwa

Syt. $\vec{Z}=(X,Y)$ $\quad S_{\vec{Z}}=\{(x_i,y_j)\}$ $\quad i=1,2,\dots$ $\quad j=1,2,\dots$

- **Łącznym rozkładem prawdopodobieństwa** nazywamy (dwuargumentową) funkcję, która
$$\forall i,j:\ P_{X,Y}(x_i,y_j)=P[\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}]\equiv P[X=x_i,Y=y_j]$$
- Własności:
$$\forall i,j\quad P_{X,Y}(x_i,y_j)\geq 0$$
$$\sum_i\sum_j P_{X,Y}(x_i,y_j)=1$$
$$P(A)=\sum_{(x_i,y_j)\in A}P_{X,Y}(x_i,y_j)$$
- **Łączna dystrybuanta**
$$F_{X,Y}(x,y)=P[X\leq x,Y\leq y]=\sum_{x_i\leq x}\sum_{y_j\leq y}P_{X,Y}(x_i,y_j)$$

Brzegowy rozkład prawdopodobieństwa

- **Brzegowym rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej X** nazywamy (jednoargumentową) funkcję $P_X(x_i)$:
$$P_X(x_i)\equiv P(X=x_i)=\sum_j P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\})=\sum_j P_{X,Y}(x_i,y_j)$$
- Analogicznie: $P_Y(y_j)=\sum_i P_{X,Y}(x_i,y_j)$
- Przykład: dwukrotny rzut monetą.

X – liczba orłów w pierwszym rzucie

Y – liczba orłów w dwóch rzutach

x_i	0	1
$P_X(x_i)$	1/2	1/2

y_j	0	1	2
$P_Y(y_j)$	1/4	1/2	1/4

y_j \ x_i	0	1	$P_Y(y_j)$
0	**1/4**	**0**	=1/4
1	**1/4**	**1/4**	=1/2
2	**0**	**1/4**	=1/4
$P_X(x_i)$	=1/2	=1/2	=1

Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Syt. $\vec{Z}=(X,Y)$, X,Y – ciągłe zmienne losowe

- **Łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa pary (X,Y)** nazywamy funkcję, która wiąże się z prawdopodobieństwem zdarzenia A poprzez:
$$P(A)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
- Własności:
$$\forall x,y\quad f_{X,Y}(x,y)\geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1$$
$$P(x<X\leq x+dx, y<Y\leq y+dy)=f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Łączna dystrybuanta

- **Łączna dystrybuanta**
$$F_{X,Y}(x,y)=P[X\leq x,Y\leq y]=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$
- Własności

1. $F_{X,Y}(-\infty,y)=F_{X,Y}(x,-\infty)=0$
2. $F_{X,Y}(+\infty,+\infty)=1$
3. $dla\ x_1\leq x_2\ i\ y_1\leq y_2\quad F_{X,Y}(x_1,y_1)\leq F_{X,Y}(x_2,y_2)$
4. $\lim_{\delta\to 0^+}F_{X,Y}(x+\delta,y)=\lim_{\delta\to 0^+}F_{X,Y}(x,y+\delta)=F_{X,Y}(x,y)$
5. $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F_{X,Y}(x,y)$

Łączna dystrybuanta

- Własności

6. $P[a < X \le b, c < Y \le d] = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(b,c) - F_{X,Y}(a,d) + F_{X,Y}(a,c)$

Dowód:

$$P[a < X \le b, c < Y \le d] = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx - \int_{-\infty}^{a} \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{d} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx - \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{c} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx +$$

$$- \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{d} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx + \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{c} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(b,c) - F_{X,Y}(a,d) + F_{X,Y}(a,c)$$

Łączna dystrybuanta

7. $F_X(x) = P[X \le x] = P[X \le x, Y < +\infty] = F_{X,Y}(x,+\infty)$

$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$

- Prowadzi to do **dystrybuanty brzegowej**
- **Dystrybuanta brzegowa** zmiennej X to

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

a stąd **brzegowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa**

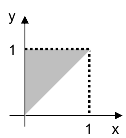
$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} F_{X,Y}(x,+\infty) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,v)\,dv$$

Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

Syt. X,Y – ciągłe zmienne losowe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & dla\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & poza\ tym\ obszarem \end{cases}$$



- Normalizacja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 1 \quad \rightarrow \quad \int_0^1 \int_x^1 c\,dy\,dx = 1$$

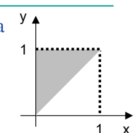
$$\int_0^1 \int_x^1 c\,dy\,dx = c\int_0^1 \int_x^1 1\,dy\,dx = c\int_0^1 y\Big|_x^1\,dx = c\int_0^1 1 - x\,dx = c\left(x\Big|_0^1 - \tfrac{1}{2}x^2\Big|_0^1\right) =$$

$$= c\left(1 - 0 - \tfrac{1}{2} + 0\right) = \tfrac{1}{2}c$$

$$\tfrac{1}{2}c = 1 \quad \rightarrow \quad c = 2$$

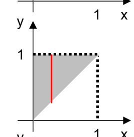
Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & dla\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & poza\ tym\ obszarem \end{cases}$$

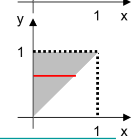


- Brzegowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 2\,dy = 2\,y\Big|_x^1 = 2(1-x)$$

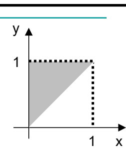


$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y 2\,dx = 2\,x\Big|_0^y = 2(y-0) = 2y$$



Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

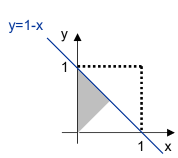
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & dla\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & poza\ tym\ obszarem \end{cases}$$



- Prawdopodobieństwo P(X+Y<1)

$$P(X+Y<1) = \iint\limits_{\substack{odpowiedni \\ obszar}} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

X+Y<1 → Y<-X+1



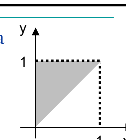
$$P(X+Y<1) = \int_0^{0.5} \int_x^{1-x} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{0.5} \int_x^{1-x} 2\,dy\,dx =$$

$$= 2\int_0^{0.5} y\Big|_x^{1-x}\,dx = 2\int_0^{0.5} 1 - x - x\,dx = 2\int_0^{0.5} 1 - 2x\,dx =$$

$$= 2\left(x - 2\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{0.5} = 2\left(\tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 0 + 0\right) = 2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{2}$$

Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & dla\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & poza\ tym\ obszarem \end{cases}$$

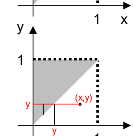


- Dystrybuanta $F_{X,Y}(x,y)$

1. $x < 0$ lub $y < 0$: $F_{X,Y}(x,y) = 0$
2. $0 < x < 1$ i $0 < y < x$

$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^y \int^y 2\,d$ [illegible]

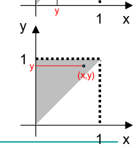
$= 2(y$ [illegible] $y^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - 0 + 0) = y^2$



3. $0 < x < 1$ i $x < y < 1$

$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int^y 2\,d$ [illegible]

$= 2(y$ [illegible] $x - \tfrac{1}{2}x^2 - 0 + 0) = 2xy - x^2$



Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

4. $0<x<1 \quad i \quad y\geq 1$

$F_{X,Y}(x,y)=\int_0^x\int_0^1 2\,d\ldots$

$=2(\ldots - \frac{1}{2}x^2-0+0)=2x-x^2$

5. $x\geq 1 \quad i \quad 0<y<1$

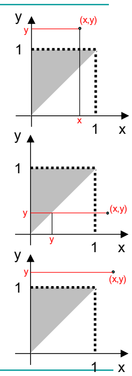
$F_{X,Y}(x,y)=\int_0^y\int_0^y 2\,d\ldots$

$=2(y\ldots y^2-\frac{1}{2}y^2-0+0)=y^2$

6. $x\geq 1 \quad i \quad y\geq 1$

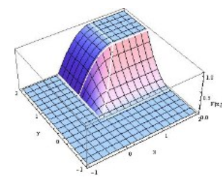
$F_{X,Y}(x,y)=\int_0^1\int_0^1 2\,d\ldots$

$=2(\ldots -\frac{1}{2}1^2-0+0)=1$



Niezależność zmiennych losowych

Wynik końcowy $F_{X,Y}(x,y)$:



- **Zmienne losowe** X,Y tworzące wektor losowy **są niezależne gdy**
  $\forall x,y \quad F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$
- co jest równoważne
  $$\boxed{\begin{array}{l}\forall x,y \quad P_{X,Y}(x,y)=P_X(x)P_Y(y)\\ \forall x,y \quad f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\end{array}}$$

Kowariancja i korelacja zmiennych losowych

- Syt. Z=g(X,Y)

$$E(Z)=\begin{cases}\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)P_{X,Y}(x_i,y_j)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy\end{cases}$$

- Wnioski: 1. $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- Dla zmiennych niezależnych
  2. $E(g_1(X)\cdot g_2(Y))=E(g_1(X))\cdot E(g_2(Y))$
  w szczególności dla $g_1(X)=X$ i $g_2(Y)=Y$ $\quad E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$
- Dla zmiennych zależnych
  $E(XY)\neq E(X)\cdot E(Y)$
  $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

Kowariancja i korelacja zmiennych losowych

- Wzór $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$
  jest równoważny
  $$\boxed{\begin{array}{l}cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=\\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))(y-E(Y))f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy\end{array}}$$
- Własności:
  1. $cov(X,X)=var(X)\geq 0$
  2. Kowariancja nie musi być nieujemna.
  3. Dla zmiennych niezależnych cov(X,Y)=0
  4. E(XY) nazywamy **korelacją zmiennych** X i Y

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

- **Współczynnik korelacji** zmiennych losowych X,Y (unormowana kowariancja) to
  $$\boxed{\rho_{X,Y}\equiv\rho(X,Y)\equiv corr(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}}$$
- Własności:
  1. Współczynnik korelacji jest bezwymiarowy.
  2. $-1\leq\rho_{X,Y}\leq 1$

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

- 2. $\boxed{-1\leq\rho_{X,Y}\leq 1}$
  Dowód:

Lemat (nierówność Schwartza): $\left(E(XY)\right)^2\leq E(X^2)E(Y^2)$

Dowód lematu:

$$E(X^2)\geq 0 \quad bo \quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{x^2}_{\geq 0}\underbrace{f_X(x)}_{\geq 0}\,dx$$

Przypadek 1: $E(X^2)>0$

$$g(z)\equiv E\left[\left(Y-zX\right)^2\right]=E\left[Y^2+z^2X^2-2zXY\right]=E\left[Y^2\right]+z^2E\left[X^2\right]-2zE[XY]$$

g(z) jest parabolą, ramiona do góry, g≥0 gdyż jest E(nieujemna funkcja)→Δ≤0

$$\Delta=4\left(E[XY]\right)^2-4E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]$$

$$\Delta\leq 0 \;\rightarrow\; 4\left(E[XY]\right)^2-4E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]\leq 0 \;\rightarrow\; \left(E[XY]\right)^2\leq E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]$$

Przypadek 2: $E(X^2)=0$

$$\rightarrow \; X=0 \;\rightarrow\; \begin{cases}\left(E[XY]\right)^2=\left(E[0\cdot Y]\right)^2=\left(E[0]\right)^2=0\\ E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]=E\left[0^2\right]E\left[Y^2\right]=0\end{cases} \;\rightarrow\; \left(E[XY]\right)^2=E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]$$

□

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

Dowód twierdzenia:

Weźmy X→X-E(X), Y→Y-E(Y), wtedy z lematu

$$\left(E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]\right)^2 \le E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)E\left(\left(Y-E(Y)\right)^2\right)$$

$$\left(\operatorname{cov}(X,Y)\right)^2 \le \operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)$$

$$-\sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)} \le \operatorname{cov}(X,Y) \le \sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)}$$

$$-1 \le \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)}} \le 1 \quad \rightarrow \quad -1 \le \rho_{X,Y} \le 1 \qquad \square$$

- 3. Dla X,Y niezależnych $\rho_{X,Y}=0$.

Dowód: $\operatorname{cov}(X,Y) = E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right] =$

$$= E\left[\left(X-E(X)\right)\right]\cdot E\left[\left(Y-E(Y)\right)\right] = 0\cdot 0 = 0$$

$$\rightarrow \quad \rho_{X,Y} = 0$$

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

4. **Współczynnik korelacji jest miarą zależności liniowej**

$$\boxed{\begin{array}{llll} \rho_{X,Y} = 1 & dla & Y = aX+b & a>0 \\ \rho_{X,Y} = -1 & dla & Y = aX+b & a<0 \end{array}}$$