

Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 6  
Informatyka stosowana, wszystkie grupy

Do rozwiązania niektórych z poniższych zadań przydatne mogą być tablice statystyczne, wystarczą te znajdujące się na stronie kursu. Proszę nauczyć się odczytywać z nich potrzebne wartości.

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny  $N(x_0, \sigma_0^2)$ . Znajdź funkcję gęstości prawdopodobieństwa, wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej  $Y = A * X + B$ .
2. Wiedząc że zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny i wartość oczekiwaną  $E(X)=0$ , znajdź odchylenie standardowe w następujących przypadkach, gdy wiadomo że:
  - (a) Prawdopodobieństwo  $P(-4 < X < 4) = 0.954$
  - (b) Prawdopodobieństwo  $P(X < -15) = 0.0015$
  - (c) Prawdopodobieństwo  $P(-1.348 < X < 1.348) = 0.5$
  - (d) Prawdopodobieństwo  $P(X > 4.935) = 0.05$
3. Zmienna losowa  $Y$  ma rozkład chi-kwadrat o 13 stopniach swobody. Znajdź prawdopodobieństwo:
  - (a)  $P(Y < 5)$
  - (b)  $P(Y > 9.3)$
  - (c)  $P(7.04 < Y < 8.63)$
4. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X,Y)$  ma rozkład podany w tabeli:

| $y_k / x_i$ | 3.0  | 3.5  | 4.0  | 4.5  | 5.0  |
|-------------|------|------|------|------|------|
| 3.0         | 0.16 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 3.5         | 0.12 | 0.04 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 4.0         | 0.08 | 0.08 | 0.08 | 0.00 | 0.00 |
| 4.5         | 0.00 | 0.12 | 0.06 | 0.05 | 0.04 |
| 5.0         | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.08 | 0.08 |

gdzie  $X$  jest średnią ocen w sesji egzaminacyjnej w semestrze III dla losowo wybranego studenta, zaś  $Y$  jest średnią ocen tego studenta w sesji egzaminacyjnej w semestrze IV. Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych.

5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednorodny w przedziale  $(0,1)$ , zaś  $Y = X^k$ ,  $k > 0$ . Proszę policzyć kowariancję oraz współczynnik korelacji tych zmiennych.

6. W urnie znajduje się  $N=20$  kul, w tym  $M=5$  kul białych. Niech zmienne losowe  $X$  i  $Y$  przyjmują wartości równe liczbie wyjętych kul białych, odpowiednio w pierwszym oraz drugim, bezzwrotnym losowaniu kuli z urny (tzn. przyjmują one wartości 1 w przypadku wylosowania kuli białej, natomiast 0 w przypadku wylosowania kuli, która nie jest biała). Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $(X,Y)$  oraz obliczyć współczynnik korelacji. Porównać wyniki, przyjmując  $N=100$ ,  $M=25$ , oraz  $N=1000$ ,  $M=250$ . Zinterpretować uzyskane wyniki.
7. Zadanie komputerowe dla chętnych, aspirujących do podwyższenia oceny z całości kursu.

Niech niezależne zmienne  $X_1 \dots X_n$  mają rozkłady normalne  $N(0,1)$ . Wtedy  $Y = \sum_{i=1}^n x_i^2$  ma rozkład chi-kwadrat o  $n$  stopniach swobody. Napisać bazujący na tym generator liczb losowych  $Y$  (np. dla  $n=3$ ). Otrzymany wynik porównać na wykresie z analityczną postacią rozkładu  $\chi_{n=3}^2$ . Zmienne o rozkładzie normalnym proszę otrzymać korzystając z generatora o rozkładzie jednorodnym i transformacji Box-Mullera.