

Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 7
Informatyka stosowana, wszystkie grupy

1. Wykonano 6 równoczesnych pomiarów wielkości X i Y:

$$X = 1.7, 1.2, 0.6, 1.4, 1.3, 1.0$$

$$Y = 1.4, 1.0, 0.5, 1.4, 2.1, 1.3$$

- Oszacuj punktowo wartość oczekiwaną $E(X)$ i $E(Y)$
- Oszacuj punktowo odchylenia standardowe $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.
- Oszacuj kowariancję $\text{cov}(X, Y)$ i współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$ dla wielkości X i Y.
- Obliczając kolejne pary dla zmiennych $A = X - 2Y$ i $B = X^2 + Y^2$ oszacować punktowo wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i kowariancję zmiennych A i B.
- Stosując wzory na przenoszenie błędów oszacuj wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i kowariancję zmiennych $A = X - 2Y$ i $B = X^2 + Y^2$.

2. W $n=8$ niezależnych pomiarach pewnej wielkości X (o nieznanym parametrach rozkładu) otrzymano następujące wyniki estymatorów wartości oczekiwanej i wariancji:

$$T(E(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 2.0$$

oraz

$$T(\sigma^2(X)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 5.05$$

- Podaj przedział ufności dla $E(X)$ przy poziomie ufności 0.95
 - Podaj przedział ufności dla wariancji $\sigma^2(X)$ i odchylenia standardowego $\sigma(X)$ przy poziomie ufności 0.95.
 - Podaj przedział ufności dla $E(X)$ przy poziomie ufności 0.95, gdyby znana była informacja, że $\sigma^2(X)=4.8$.
3. Zauważono, że w próbie 15 pacjentów pewna choroba zakaźna powoduje wystąpienie objawów średnio po 10.37 dniach (z estymatorem wariancji $S^2(X) = 3.5$) od momentu zakażenia. Zakładając normalny rozkład pojawiania się objawów, proszę:

- (a) wyznaczyć przedział ufności dla wartości oczekiwanej czasu wystąpienia objawów na poziomie ufności 0.95,
- (b) wyznaczyć przedział ufności dla wariancji czasu wystąpienia objawów na poziomie ufności 0.95,
- (c) powtórzyć powyższe obliczenia na poziomie ufności 0.9999,

4. Dla każdej z czterech 11-to elementowych serii danych $A_i = \{(x_i, y_i)\}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ pomiarowych

x_1	10.0	8.0	13.0	9.0	11.0	14.0	6.0	4.0	12.0	7.0	5.0
y_1	8.04	6.95	7.58	8.81	8.33	9.96	7.24	4.26	10.84	4.82	5.68
x_2	10.0	8.0	13.0	9.0	11.0	14.0	6.0	4.0	12.0	7.0	5.0
y_2	9.14	8.14	8.74	8.77	9.26	8.10	6.13	3.10	9.13	7.26	4.74
x_3	10.0	8.0	13.0	9.0	11.0	14.0	6.0	4.0	12.0	7.0	5.0
y_3	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73
x_4	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	19.0	8.0	8.0	8.0
y_4	6.58	5.76	7.71	8.84	8.47	7.04	5.25	12.50	5.56	7.91	6.89

wyznacz punktowo estymatory:

- (a) wartości oczekiwanej x ,
- (b) wartości oczekiwanej y ,
- (c) wariancji x ,
- (d) wariancji y ,
- (e) współczynnika korelacji $\rho(x, y)$,
- (f) współczynniki regresji modelu $y = A * x + B$,
- (g) wykonać rysunek danych i dopasowanej prostej.

Wskazówka: Można skorzystać z pomocy komputera.

5. W pewnym pomiarze wartości zmiennej Y przy ustalonej wartości zmiennej X otrzymano następujące pary (x_i, y_i) : (0.6, 1.40), (1.3, 1.65), (2.1, 3.56), (2.9, 5.93), (4.0, 6.00), (5.0, 8.31), (6.4, 8.93), (7.5, 10.78), (9.2, 12.15), (9.8, 15.58), (11.1, 16.11), (12.4, 18.55). Załóżmy że odchylenie standardowe dla wszystkich pomiarów y_i jest stałe i wynosi $\sigma_Y = 0.7$. Załóżmy dalej, że dane te są opisywane przez model teoretyczny prostą postaci $y = A * x$. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów znaleźć współczynnik A i jego błąd.
6. Załóżmy że dane podane w poprzednim zadaniu opisane są modelem teoretycznym $y = A*x+B$. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów znaleźć współczynniki A i B i ich błędy.