

## Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Kurs dla kierunku  
Informatyki stosowanej  
Uniwersytet Jagielloński  
Kraków, 2023/2024

Dr hab. Roman Skibiński, prof. UJ

RPIS 2023/2024 1

## UWAGA:

Slajdy zawierają (prawie) całość materiału przedstawianego na wykładach;  
Powinny być uzupełnione wiadomościami z ćwiczeń

<http://koza.if.uj.edu.pl/~rpis/>

<http://koza.if.uj.edu.pl/~aplety/>

RPIS 2023/2024 2

## Warunki zaliczenia (1)

- Ćwiczenia: ocena będzie średnią ocen cząstkowych (w skali 2.0-5.0) - z dwóch kolokwium z zadań i aktywności. Niezaliczone kolokwia będzie można poprawiać na kolokwium poprawkowym, poprawa dotyczy tylko niezaliczonej części materiału. W przypadku poprawiania jednego kolokwium średnia będzie liczona jako średnia z czterech ocen (2 kolokwia + aktywność + kolokwium poprawkowe) przeliczona jak wyżej. Analogicznie w przypadku poprawiania obu kolokwium średnia będzie liczona z pięciu ocen.
- Średnia ta zostanie przeliczona na ocenę z ćwiczeń, wpisywaną do indeksu, w następujący sposób:  
[2.66-3.20] – ocena dostateczna,  
[3.20-3.70] – ocena dostateczna plus,  
[3.70-4.20] – ocena dobra,  
[4.20-4.50] – ocena dobra plus,  
[4.51-5.0] – ocena bardzo dobra.
- Zasady dla oceny z aktywności na ćwiczeniach ustalone są w grupach ćwiczeniowych.
- Warunkiem zaliczenia ćwiczeń jest zaliczenie (najpóźniej w wyniku poprawy) obu kolokwium co najmniej na ocenę dostateczną.

RPIS 2023/2024 3

## Warunki zaliczenia (2)

- Wykład: cztery kartkówki na ćwiczeniach, oceniane w skali 0-5 pkt. Suma punktów prowadzi do oceny:  
[12-13.5] – ocena dostateczna,  
[13.5-15.0] – ocena dostateczna plus,  
[15.0-16.5] – ocena dobra,  
[16.5-18.0] – ocena dobra plus,  
[18.0-20.0] – ocena bardzo dobra.
  - Przed kartkówkami (niezapowiedzianymi) dostępne będą zagadnienia do przygotowania
  - W trakcie semestru można poprawić jedną, najgorzej napisaną kartkówkę + te z usprawiedliwionymi nieobecnościami
  - Osoby, które nie uzyskają 12 punktów piszą kolokwium poprawkowe z całości wykładu
- Aby uzyskać zaliczenie z wykładu ocena z ćwiczeń musi być nie mniejsza niż 3.0.
- Ocena końcowa (wpisywana do indeksu, z wykładu):**  
(2/3\*ocena z ćwiczeń + 1/3\*ocena z wykładu)\*0.9  
Powyższy algorytm prowadzi do oceny wpisywanej do indeksu:  
do 2.70 – ocena niedostateczna,  
[2.70-3.15] – ocena dostateczna,  
[3.15-3.60] – ocena dostateczna plus,  
[3.60-4.05] – ocena dobra,  
[4.05-4.5] – ocena dobra plus.  
Osoby, które rozwiążą zadania programistyczne (co najmniej wszystkie -1) będą miały ocenę podwyższoną o pół stopnia np. z dobrej plus na bardzo dobrą. Dotyczy to podwyższania od oceny 3.0. **Zatem warunkiem otrzymania oceny bardzo dobrej w indeksie jest napisanie niezbednej liczby zadanych programów.**

RPIS 2023/2024 4

## Literatura

- W.Krysicki, J.Bartos i inni, „Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach” tomy 1 i 2, PWN 2005

Literatura dodatkowa:

- J.Jakubowski, R.Sztencel „Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego”, SCRIPT, W-wa 2006.
- S.Brandt „Analiza danych”, PWN (od 1999)
- R.Nowak „Statystyka dla fizyków” PWN 2002.
- V.Rohatgi, „Statistical inference”, J.Wiley&Sons, Inc, 1984.

RPIS 2023/2024 5

Definiujemy sztukę przewidywania, inaczej sztukę stochastyki, jako sztukę oceniania z największą możliwą dokładnością prawdopodobieństwa zdarzeń, tak żebyśmy w naszych osądach i działaniach zawsze mogli opierać się na tym, co okazało się najlepsze, najodpowiedniejsze, najpewniejsze, najsensowniejsze; jest to jedyny cel mądrości filozofa i roztropności męża stanu.

J.Bernoulli „Ars Conjectandi”  
(„Sztuka przewidywania”) 1713

Za I.Stewart „Oswajanie nieskończoności.  
Historia matematyki”

RPIS 2023/2024 6

## Zakres wykładu

- **Rachunek prawdopodobieństwa** – jak liczyć prawdopodobieństwa zdarzeń i jak je globalnie opisywać.
- **Statystyka matematyczna** – jak wnioskować w sytuacjach, gdy mamy niepełną informację (wniosek o całość grupy na podstawie informacji zebranej na części grupy, np. sondaże przedwyborcze), jak oceniać wiarygodność takiego wnioskowania (hipotezy statystyczne)

RPIS 2023/2024 7

## Dlaczego ?

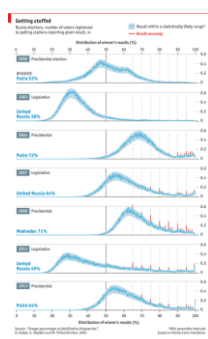
- Ma wpływ na nasze życie (gry hazardowe, ubezpieczenia, handel, kryminalistyka, medycyna, polityka, manipulacje)
- Zastosowania w informatyce:
  - symulacje komputerowe
  - metody obliczeniowe
  - modelowanie rzeczywistości (grafika)
  - probabilistyczna (statystyczna) analiza algorytmów
  - algorytmy probabilistyczne (w tym komputer kwantowy)
  - systemy kolejkowe
  - eksploracja danych (Big Data)
  - układy z szumem (np. rozpoznawanie mowy)

RPIS 2023/2024 8

## Rozgrzewka I

Statystyka jako test uczciwości wyborów

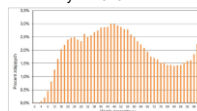
- Zał: kandydat wygrywa z 70% poparciem w skali kraju. Jaki będzie rozkład głosów w poszczególnych komisjach ?



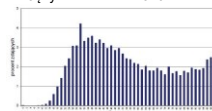
RPIS 2023/2024 9

## Rozgrzewka II - matury

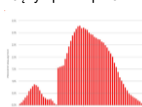
Matematyka 2020



Język niemiecki 2020



Język polski p 2021



2020



2013



<https://nest.gazeta.pl/nest/7,151003,27046482,matura-z-polskiego-2021-juz-za-nami-jaj-wyniki-co-noku-przezza.html>

RPIS 2023/2024 10

## Historia

- Starożytność, Średniowiecze – gry losowe
- XVI w G.Cardano (1501-1576), „Księga o grach losowych” – podstawy prawdopodobieństwa (gry w kości i w karty, dodatkowo rozdział o skutecznym oszukiwaniu)
- A.Gombaud (Chevalier de Méré, 1607-1684) – korespondencja pomiędzy B.Pascalem (1623-1662; 1654, 1655 – trójkąt Pascala) a P.de Fermat (1601-1665), problem podziału puli przy przerwaniu gry („problem of points”)

Rozwiązanie biorące pod uwagę tylko dotychczasowe wyniki jest błędne, należy uwzględnić możliwe zdarzenia do zaplanowanego końca gry.

RPIS 2023/2024 11

## Historia

- Ch.Huygens(1629-1695), J.Bernoulli (1654-1705; 1713 – „Sztuka przewidywania”, białe i czarne kamyki w urnie),
- problemy typu „rzut uczciwą monetą”. Ale co to znaczy „uczciwa moneta”?
- T.Bayes (1701-1761): analiza bayesowska
- P.Laplace(1749-1827), K.Gauss(1777-1855)
- teoria miary
- A.Quetelet (1796-1874); 1835 statystyka społeczeństwa
- F.Galton (1822-1911); 1865 dziedziczenie, regresja
- XX w: A.N.Koimogorow (1903-1987): nowoczesna tzw. aksjomatyczna teoria prawdopodobieństwa
- Wykorzystanie komputerów – nowe możliwości i nowe zadania

RPIS 2023/2024 12

## Pojęcia wstępne

- **Eksperyment deterministyczny** – warunki wyznaczają wynik (np. tylko białe kule w urnie)
- **Eksperyment przypadkowy (zdarzenie losowe)** to taki eksperyment, którego wyniku nie potrafimy przewidzieć, mimo, że powtarzamy go w takich samych warunkach.  
(np. białe i czarne kule w urnie)

Jedyne co możemy zrobić to zebrać możliwe wyniki i określić ich prawdopodobieństwo.

## Definicja częstościowa

Powtarzamy eksperyment  $n$  razy

$N_k(n)$  – liczba wystąpienia wyniku  $k$  w  $n$  eksperymentach

$f_k(n)$  – względna częstość wyniku  $k$   $f_k(n) = \frac{N_k(n)}{n}$

spełnia z def.  $0 \leq f_k(n) \leq 1$

$$\sum_k f_k(n) = 1$$

**Częstościowa definicja prawdopodobieństwa:**

$$P(k) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n)$$

-trudne w praktyce (nieskończona liczba eksperymentów, powtarzalność doświadczeń, definicja eksperymentu (prawdopodobieństwo urodzenia dziewczynki/chłopca),

-wynika z aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa,

-przykład: aplet „Falszywa kostka”