

E3

Temperaturowa zależność oporu przewodników. Opór zastępczy układu oporników.

Celem ćwiczenia jest zbadanie temperaturowej zależności oporu i wyznaczenie temperaturowego współczynnika oporu właściwego α dla kilku różnych przewodników. W temperaturze pokojowej wykonywany jest również pomiar oporu zastępczego szeregowego i równoległego połączenia oporników i porównanie wyników z przewidywaniami teoretycznymi. Pomiar oporu prowadzony jest multimetrem i metodą równoważenia mostka Wheatstone'a.

Zagadnienia do przygotowania:

- prąd elektryczny, napięcie i natężenie prądu elektrycznego, opór elektryczny, jednostki tych wielkości,
- przewodnictwo ciał stałych, zależność oporu przewodnika od temperatury,
- prawo Ohma,
- pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa,
- opór zastępczy szeregowego i równoległego połączenia oporników,
- pomiar oporu elektrycznego za pomocą mostka Wheatstone'a.

1. Podstawowe pojęcia i definicje

Opór elektryczny i prawo Ohma

Jeżeli do końców przewodnika przyłożymy napięcie U , to przez przewodnik popłynie prąd elektryczny o natężeniu wprost proporcjonalnym do przyłożonego napięcia:

$$I = \frac{1}{R}U \quad (\text{równoważny wzór: } U=IR). \quad (1.1)$$

Współczynnik proporcjonalności zwyczajowo zapisujemy jako symbol $\frac{1}{R}$ a wielkość R nazywamy oporem (przy większym oporze to samo napięcie wywoła mniejszy prąd). Wartość oporu danego przewodnika zależy od kształtu tego przewodnika (powierzchni jego przekroju i jego długości), od materiału, z którego jest wykonany i od temperatury, o czym niżej. Zależność zapisaną wzorem (1.1) nazywamy **prawem Ohma**. Jak można łatwo na jego podstawie ustalić, jeżeli jednostką napięcia jest wolt (V), a jednostką natężenia jest amper (A), to jednostką oporu jest iloraz V/A nazwany omem (Ω). Opór przewodnika jest wprost proporcjonalny do jego długości (l) i odwrotnie proporcjonalny do powierzchni jego przekroju (S):

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1.2)$$

gdzie współczynnikiem proporcjonalności ρ jest **opór właściwy**, który jest stałą materiałową charakteryzującą daną substancję. Z równania (1.2) można łatwo wyprowadzić wymiar (jednostkę) oporu właściwego (Ωm). Dla metali w temperaturze 0°C opór właściwy jest rzędu $10^{-8} \Omega\text{m}$. Wartości oporu właściwego są zebrane w tablicach. Z uwagi na to, że powierzchnie przekroju drutów podaje się zwykle w (mm^2) a ich długości – w metrach, wartości oporu właściwego wygodnie jest podawać w $\left(\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}\right)$. Opór właściwy podany w tych jednostkach jest oczywiście

równy liczbowo wyrażonemu w omach oporowi wykonanego z danego materiału drutu o powierzchni przekroju 1 mm^2 i długości 1 m

Przewodnictwo ciał stałych

Prąd elektryczny w większości przypadków polega na przepływie elektronów. W tzw. **izolatorach** wszystkie elektrony są związane ze „swoimi” atomami i dlatego prąd elektryczny nie może tam powstać. W **metalach** niektóre elektrony mogą się po wnętrzu metalu swobodnie przemieszczać. Jeżeli do próbki metalu (w praktyce – do drutu) przyłożymy źródło napięcia (co oznacza zanurzenie tego metalu do stabilnego pola elektrycznego), chmura swobodnych elektronów przemieszcza się pod wpływem tego pola w kierunku, w którym ich elektrostatyczna energia potencjalna maleje: powstaje prąd elektryczny. Własności pośrednie między izolatorami i przewodnikami (metalami) wykazują **półprzewodniki**. Są to substancje (takie, jak np. krzem i german), w których elektrony przewodnictwa pojawiają się warunkowo, na skutek wprowadzenia domieszek innych pierwiastków lub pod wpływem rosnącej temperatury (np. węgiel w formie krystalicznej). Wyjaśnienie mechanizmów prowadzących do pojawienia się elektronów przewodnictwa w niektórych substancjach (metalach i półprzewodnikach) możliwe jest dopiero w oparciu o mechanikę kwantową.

Zależność oporu przewodnika od temperatury

Zwiększanie temperatury prowadzi do zwiększania energii drgań sieci krystalicznej. Jak można łatwo przewidzieć, drgania sieci krystalicznej przeszkadzają w swobodnym przemieszczaniu się elektronów: dlatego opór przewodników zwykle rośnie ze wzrostem temperatury. Na tę zależność nakłada się inny mechanizm, ujawniający się – jak już wiemy – w niektórych substancjach: otóż wraz ze wzrostem temperatury przybywa tam elektronów zerwanych z więzi mocujących je do atomów, co ułatwia przepływ prądu i wiąże się oczywiście ze zmniejszaniem oporu. Niekiedy ten drugi efekt przeważa i wtedy opór maleje ze wzrostem temperatury (tak jest na przykład w przypadku węgla).

$$R = R_0 + \alpha R_0 (T - T_0) \quad (1.3)$$

czyli zmiana oporu właściwego przy wzroście temperatury bezwzględnej o $T - T_0$ jest proporcjonalna zarówno do samego tego oporu ρ_0 jak i do przyrostu temperatury. Współczynnik proporcjonalności α nazywamy temperaturowym współczynnikiem oporu właściwego. Powyższy wzór, przekształcony do postaci $\rho_T = \rho_0 + \rho_0 \alpha (T - T_0)$, prowadzi bezpośrednio do bliźniaczego wzoru na zależność oporu przewodnika od temperatury:

$$R_T = R_0 + R_0 \alpha (T - T_0) \quad (1.4)$$

gdzie R_0 i R_T są oporami przewodnika w temperaturach T_0 i T , odpowiednio. Temperaturowy współczynnik oporu właściwego w rozważanym tu przybliżeniu liniowym można więc znaleźć doświadczalnie ze wzoru

$$\alpha = \frac{R_T - R_0}{R_0 (T - T_0)} \quad (1.5)$$

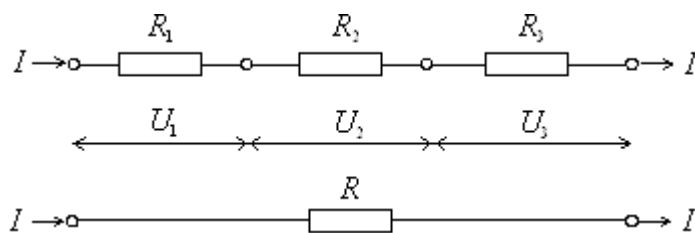
mierząc zmieniającą się temperaturę przewodnika i jego opór.

Opór szeregowego układu oporników

Elektrony płyną od miejsc, gdzie mają wyższą elektrostatyczną energię potencjalną, do miejsc, gdzie ich energia potencjalna jest niższa, czyli płyną od miejsc, gdzie potencjał jest niższy, do miejsc, gdzie jest wyższy (bo ładunek elektronów jest ujemny).

Rozważmy kilka odcinków przewodnika (kilka oporników) o znanych oporach, połączonych w szereg (jak na Rys. 1) i do końców szeregu przyłożymy stałe napięcie U . Popłynie ustabilizowany

prąd. Skoro ładunki nigdzie się w obwodzie nie gromadzą, to natężenie tego prądu będzie takie samo na każdym przekroju tego szeregu. Wyniesie ono jak zwykle $I = \frac{1}{R}U$, gdzie R jest



Rys.1. Układ oporników połączonych szeregowo.

szukanym oporem szeregowego układu oporników. Równocześnie napięcia U_1 , U_2 , U_3 na końcach poszczególnych oporników, i natężenia I , muszą spełniać związki:

$$U_1 = IR_1, \quad U_2 = IR_2, \quad U_3 = IR_3,$$

gdzie oczywiście $U_1 + U_2 + U_3 = U = IR$. Podstawiając i dzieląc przez I dostajemy szukany opór:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (1.6)$$

(kropki są na wypadek, gdyby oporów składowych było więcej, niż trzy).

Mamy więc wynik: **opór szeregowego układu oporników jest równy sumie ich oporów.**

Opór równoległego układu oporników

Na Rys. 2 mamy trzy oporniki połączone równolegle. Interesuje nas łączny opór R , jaki stawia ten układ. Po podłączeniu napięcia U do punktów zaznaczonych kółkami, każdy z oporników będzie obciążony takim samym napięciem U . Tak więc przez oporniki popłyną prądy o natężeniach

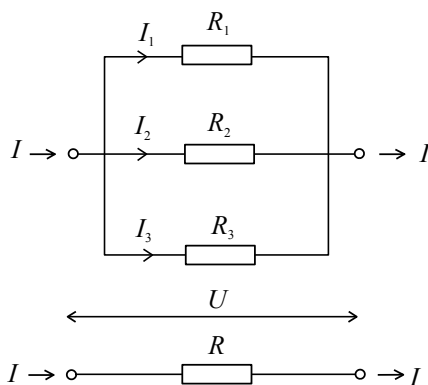
$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3},$$

dające w sumie prąd o natężeniu $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$. Z drugiej strony mamy $I = \frac{U}{R}$

i stąd (po podzieleniu przez U):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (1.7)$$

(kropki sygnalizują możliwość naturalnego uogólnienia tego wzoru dla większej liczby oporników).



Rys. 2. Układ oporników połączonych równolegle.

Tak więc odwrotność oporu, jaki stawia zestaw oporników połączonych równolegle, jest równa algebraicznej sumie odwrotności oporów poszczególnych oporników.

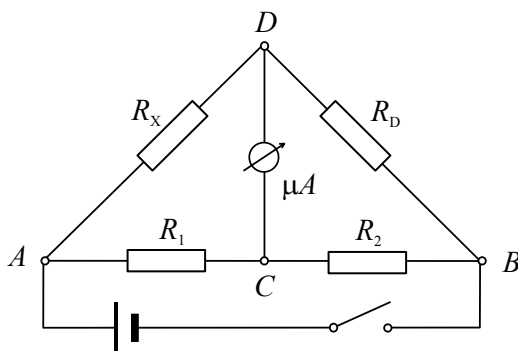
Bezpośrednia odpowiedź na pytanie o wartość łącznego (zastępczego) oporu R jest oczywiście taka:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots} \quad (1.8)$$

Wyprowadzone tu wzory dla oporów zastępczych pozwalają wyprowadzić przytoczone wyżej równanie (1.2), co pozostawiamy jako pożyteczne ćwiczenie.

Pomiar oporu elektrycznego w układzie mostka Wheatstone'a

Mostek Wheatstone'a jest układem czterech oporników R_X , R_D , R_1 , R_2 , połączonych jak na Rys. 3, czułego miernika natężenia (w naszym zestawie – mikroamperomierza) i źródła zasilania napięciem stałym, podawanym na punkty A i B . Opory R_D , R_1 , R_2 są znane, opór R_X mamy wyznaczyć. Po obciążeniu układu napięciem, prąd może z punktu A do punktu B płynąć zasadniczo dwoma drogami: przez opory R_X i R_D (czyli przez gałąź ADB) oraz przez opory R_1 i R_2 (czyli gałęzią ACB). Połączenie punktów C i D (to właśnie jest „mostek”) daje dodatkową możliwość przepływu prądu między tymi dwiema gałęziami. **Pomiar polega na dobraniu takiego oporu R_D (przy ustalonych oporach R_1 i R_2), aby przez mikroamperomierz prąd nie płynął.**



Rys. 3. Mostek Wheatstone'a.

Usuńmy na chwilę mostek (połączenie punktów C i D). Zastanówmy się, jakie relacje muszą zachodzić między oporami R_X , R_D , R_1 , R_2 , aby różnica potencjałów między punktami D i C zanikła? Zauważmy, że po usunięciu mostka:

- 1° natężenie prądu płynącego przez opór R_X będzie równe natężeniu prądu płynącego przez opór R_D . Oznaczmy to natężenie I_{ADB} .
- 2° natężenie prądu płynącego przez opór R_1 będzie równe natężeniu prądu płynącego przez opór R_2 . To natężenie oznaczmy I_{ACB} .

Rozważmy gałąź ACB . Napięcie U między punktami A i B jest sumą napięć na oporach R_1 i R_2 :

$$U = U_1 + U_2 = I_{ACB}R_1 + I_{ACB}R_2,$$

gdzie $U_1 = I_{ACB}R_1$, $U_2 = I_{ACB}R_2$. Widać więc, że stosunek $U_1 : U_2$ będzie taki jak $R_1 : R_2$. To samo rozumowanie, przeprowadzone dla gałęzi ADB , którą popłynie prąd o natężeniu I_{ADB} , pozwala

stwierdzić, że stosunek napięć na opornikach R_x i R_D też jest równy stosunkowi ich oporów. Jeżeli między punktami C i D ma nie być napięcia (różnica potencjałów ma wynosić zero), to różnica potencjałów między końcami opornika R_x musi być równa różnicy potencjałów między końcami opornika R_1 (odpowiednio – napięcie na oporniku R_D będzie wtedy równe napięciu na oporniku R_2). Tak więc między punktami C i D napięcia nie będzie, jeżeli

$$\frac{R_x}{R_D} = \frac{R_1}{R_2}$$

W praktyce, mostka podczas pomiarów nie odłączamy, a tylko tak zmieniamy opór R_D (w tym ćwiczeniu w jego roli występuje opornica dekadowa), aby prąd w mikroamperomierzu zmalał do zera. Szukany opór R_x równy jest wtedy:

$$R_x = R_D \frac{R_1}{R_2} \quad (1.9)$$

Dla wygody możemy opory R_1 i R_2 wybrać jednakowe: mamy wówczas $R_x = R_D$, czyli odczyt z opornicy dekadowej daje bezpośrednio wartość oporu R_x . Tak właśnie dobrane są opory w tym ćwiczeniu.

2. Przebieg pomiarów

Układ doświadczalny

Układ doświadczalny składa się z zestawu trzech oporników wykonanych z różnych materiałów (grafitu, niklu i platyny), dwóch oporników o takim samym oporze połączonych ze sobą szeregowo (oporniki drutowe 10Ω ; dokładność 5%), opornicy dekadowej, termometru rtęciowego, multimetru i klucza (wyłącznika). Opory (węglowy, niklowy i platynowy) zabudowane są na stałe w zlewce z olejem parafinowym, której nie ma potrzeby otwierać. Przewody od tych oporów wyprowadzone są ze zlewki i zabudowane w płytce umocowanej na poziomie szczytu zlewki. Na końcu tej płytki mamy czytelnie opisane gniazdka służące do podłączania przewodów (obok nich są też końcówki wyprowadzone z termistora, którego w tym ćwiczeniu nie będziemy używać). Obwód zasilany jest ze źródła napięcia stałego 1.5 V. Zawierająca oporniki zlewka z olejem parafinowym umieszczona jest w kąpielu wodnej podgrzewanej na maszynie elektrycznej z termostatem.

Przebieg doświadczenia

Doświadczenie rozpoczynamy od pomiaru oporu dostępnych oporników, w temperaturze pokojowej, za pomocą multimetru (wykorzystując funkcję omomierza – multimetr pobieramy u obsługi technicznej). Wybieramy taki zakres, aby otrzymać wynik pomiaru z jak największą liczbą cyfr znaczących. Pomiar oporu powtarzamy w układzie mostka Wheatstone'a (schemat na rys. 3), ustawiając zawczasu opornicę dekadową w taki sposób, aby mostek był w przybliżeniu zrównoważony (chodzi o to, aby w chwili podania napięcia nie obciążać mikroamperomierza zbyt wielkim prądem). Dwa wybrane oporniki zestawiamy w układ szeregowy a następnie równoległy i dokonujemy pomiaru oporu tych zestawów (multimetrem i mostkiem). Sprawdzamy zgodność uzyskanych wyników z przewidywanymi na podstawie równań (1.6) i (1.8), a także wzajemną zgodność wyników uzyskanych z użyciem miernika i z mostka. **Przed podłączeniem napięcia do układu mostka obwód musi być sprawdzony przez prowadzącego ćwiczenie.**

Drugą część doświadczenia rozpoczynamy od wybrania dwóch oporników (węgla i jednego z metali), dla których badana będzie zależność ich oporu od temperatury.

Zlewkę zewnętrzną (o pojemności 0.5 l) należy napęlić wodą destylowaną do około $\frac{3}{4}$ wysokości (większa ilość podczas wrzenia będzie się wylewać na powierzchnię grzejną maszynki). Po przedyskutowaniu szczegółowego planu pomiarów z asystentem prowadzącym ćwiczenie należy, podgrzewając powoli wodę w zlewce, zwiększać temperaturę oleju parafinowego, i dla różnych temperatur mierzyć opory wybranych oporników przez zrównoważenie mostka opornicą

dekadową. W chwilach zmiany opornika (manipulujemy wtyczką na płytce nad zlewką) mostek byłby silnie niezrównoważony, co mogłoby nadmiernie obciążyć mikroamperomierz. Dlatego za każdym razem dobrze jest przed tym wyłączać napięcie kluczem.

Kolejną serię pomiarów prowadzimy podczas stygnięcia układu. W miarę możliwości staramy się robić odczyty w tych samych temperaturach, dla których robiliśmy je podczas ogrzewania (patrz niżej – opracowanie wyników). Aby usprawnić proces chłodzenia należy wynurzyć zlewkę wewnętrzną nad powierzchnię wody i chłodzić ją strumieniem powietrza z wiatraka. Wymaga to uprzedniego zadbania o dostateczną długość przewodów doprowadzonych do płytki nad zlewką.

3. Opracowanie wyników

Dla każdego przewodnika należy wykonać wykres zależności oporu zredukowanego R/R_0 od temperatury względnej $(T-T_0)$ (najlepiej w jednym układzie współrzędnych, używając różnych symboli dla różnych materiałów oraz wersji symbol pełny / symbol pusty dla temperatury rosnącej i malejącej). Jeżeli pomiar oporu wykonywany był w tych samych temperaturach zarówno podczas ogrzewania jak i chłodzenia układu, należy rozważyć zasadność wzięcia wartości średniej oporu w danej temperaturze. Dla kilku punktów nanieść prostokąty niepewności pomiarowych. Ocenić czy z powodu błędów grubych nie należy pewnych punktów odrzucić z dalszego opracowania. Tak więc należy sprawdzić czy punkty, wyraźnie odbiegające od spodziewanej zależności liniowej, to wynik złego wpisania danych z tabeli pomiarowej, czy też skutek innych czynników. Należy próbować ustalić, jakie to mogły być czynniki. W uzasadnionych przypadkach punkty te należy zaniedbać w dalszym opracowaniu. Do punktów eksperymentalnych należy dopasować prostą metodą regresji liniowej (klasycznej czy ważonej – wybór uzasadnić) i wyznaczyć temperaturowy współczynnik oporu właściwego α i jego niepewność. Następnie proszę wyznaczyć wartość temperaturowego współczynnika oporu właściwego α i jego niepewność na podstawie pomiarów oporu w dwóch ustabilizowanych temperaturach (wygodnie jest przyjąć temperaturę pokojową i temperaturę wrzenia wody). W podsumowaniu porównać z wartością tablicową (i ze sobą) wartości współczynnika α wyznaczone w/w metodami oraz skomentować uzyskane wyniki. Omówić czynniki, które mogły mieć wpływ (jaki?) na jakość uzyskanych wyników.

Tabela 1. Temperaturowy współczynnik oporności właściwej dla wybranych materiałów.

Pierwiastek	α [1/stopień]
węgiel	-0,0005
nikiel	0,006
platyna	0,003