



UNIwersytet JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Podstawy opracowania wyników pomiarów z elementami analizy niepewności statystycznych

Dr inż. Marcin Zieliński

I Pracownia Fizyczna dla Ochrony Środowiska, grupa F2, środa 11:45 - 14:30

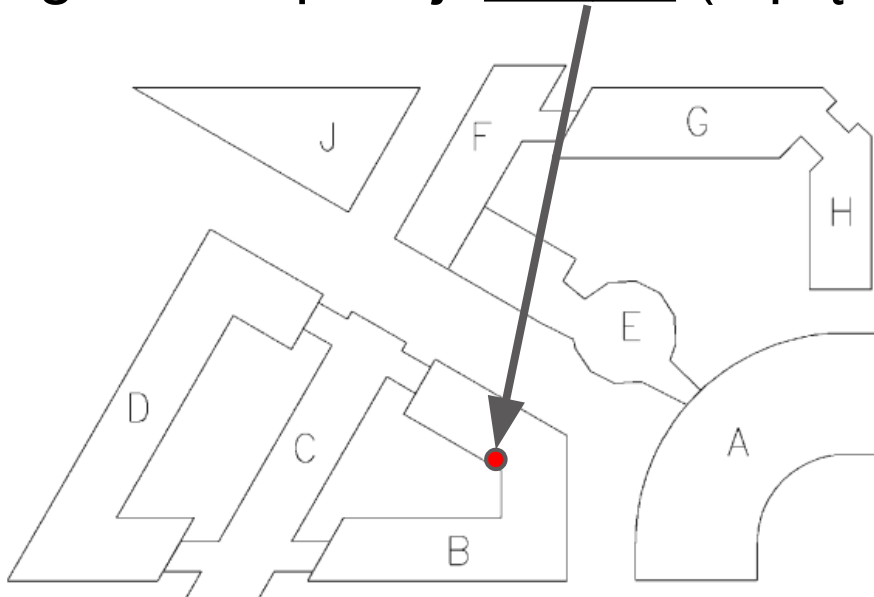
Konsultacje

Zakład Fizyki Jądrowej

Instytut Fizyki

ul. Łojasiewicza 11

Segment B pokój: **B-2,33** (2 piętro)



OZNACZENIE SEGMENTÓW BUDYNKU FIZYKI



termin: **wtorek 11:00 - 12:00**

email:

marcin.zielinski@uj.edu.pl

web: <http://koza.if.uj.edu.pl/~marcin>

tel: +48 12 664 4635

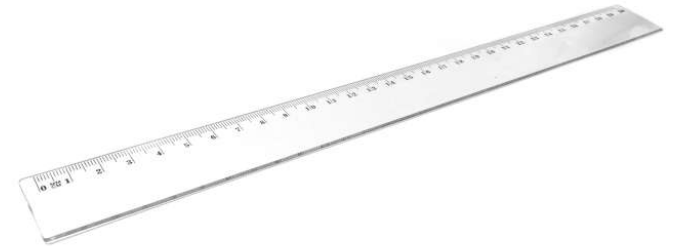
Rodzaje pomiarów

Pomiar bezpośredni:

- wielkość fizyczna mierzona jest bezpośrednio przy pomocy określonego przyrządu

Przykład:

- pomiar długości linijką,
- pomiar czasu np. stoperem.



Rodzaje pomiarów

Pomiar pośredni:

- wielkość fizyczna mierzona jest pośrednio poprzez pomiar innych wielkości fizycznych



(odległość - np. droga)



(czas pokonania drogi)



(prędkość)

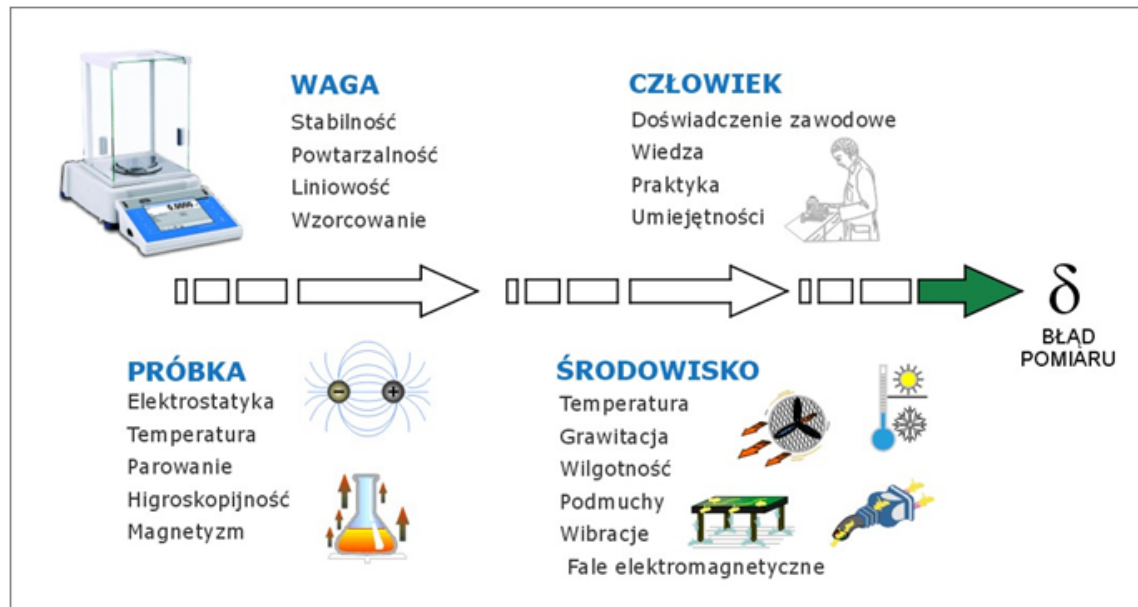
$$v = \frac{s}{t}$$

Używamy wzoru analitycznego do policzenia wartości szukanej wielkości w pomiarze pośrednim.

Dokładność pomiarów

Każdy pomiar, nawet najstaranniejszy i najdokładniejszy nie jest doskonały i ma skończoną dokładność!!!

Obarczony jest niepewnością pomiarową,
a może i błędem!



Rys. Czynniki wpływające na błąd pomiaru

Niepewności pomiarowe

1. Niepewności przypadkowe (statystyczne)

- powodowane przez skończoną dokładność przyrządów pomiarowych,
- zmieniają się losowo od pomiaru do pomiaru,
- niepewności przypadkowe można zmniejszać wykonując dany pomiar wielkości fizycznej wielokrotnie.

2. Niepewności systematyczne

- powodowane przez systematyczny błąd urządzenia mierzącego (np. źle wyskalowana (wytarowana) waga, stoper który spieszy etc.),
- zwykle trudne do zauważenia i oszacowania.

Błędy pomiarowe

1. Błąd gruby

- wynika z błędu popełnionego w czasie pomiaru lub odczytu,
- błąd może być popełniony przez urządzenie (np. awaria) lub przez odczytującego (np. zła skala na linijce: cale zamiast cm),
- zwykle na tyle duże, że można je łatwo zauważyć

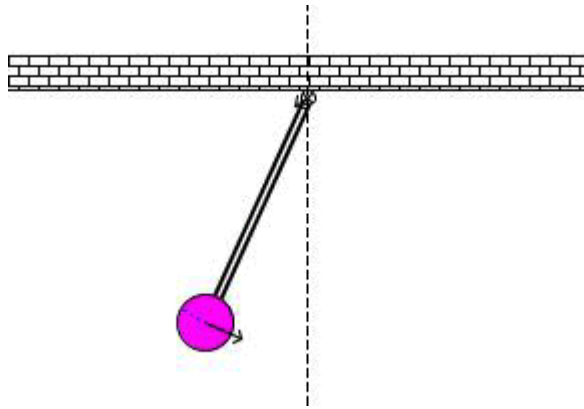
2. Błąd przybliżenia

- popełniono błąd tworząc przybliżony model

UWAGA

NIEPEWNOŚĆ \neq BŁĄD

Pomiar bezpośredni

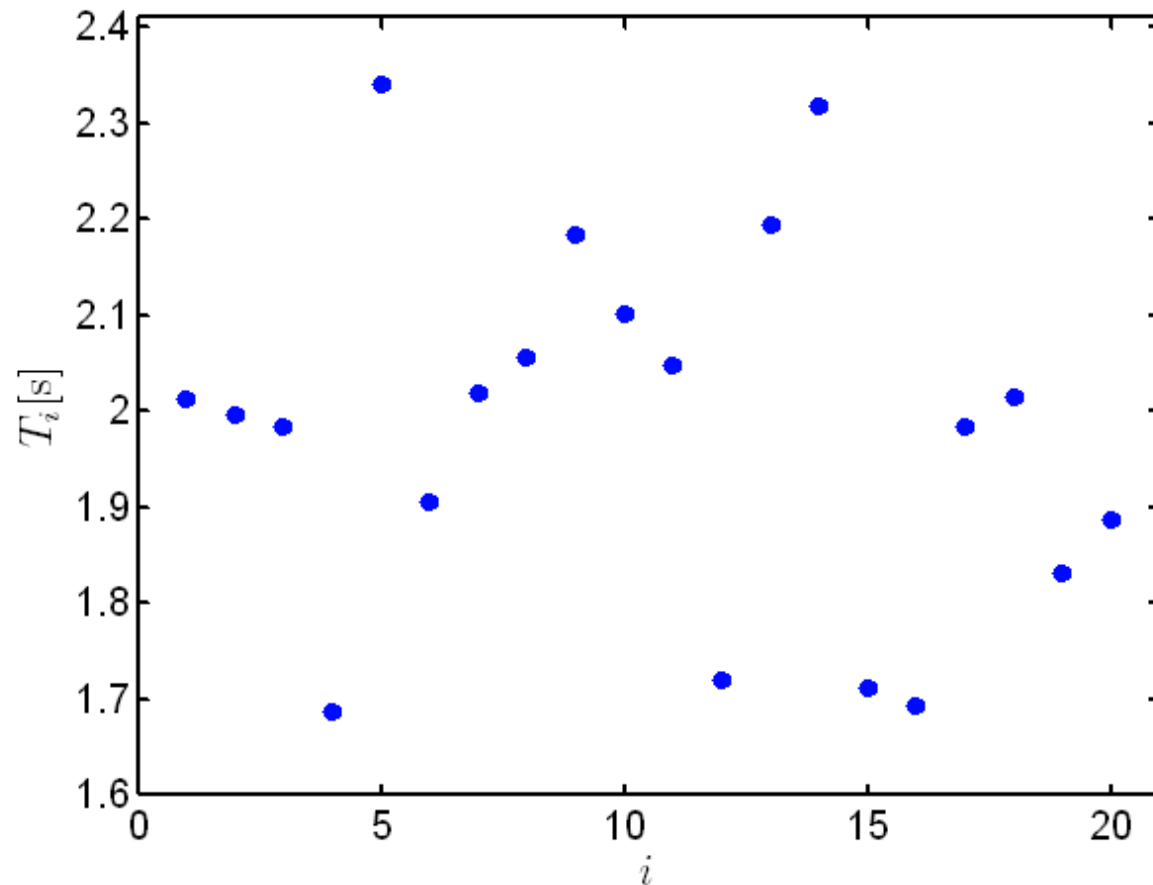


Pomiar okresu drgań wahadła (masa zawieszona na nici):

- dokładność stopera (0.1 s),
- czas reakcji eksperymentatora (0.2 s).

Pomiar bezpośredni

i -ty pomiar	T_i [s]
1	2.01
2	2.00
3	1.98
4	1.69
5	2.34
6	1.91
7	2.02
8	2.06
9	2.18
10	2.10
11	2.05
12	1.72
13	2.19
14	2.32
15	1.71
16	1.69
17	1.99
18	2.02
19	1.83
20	1.89

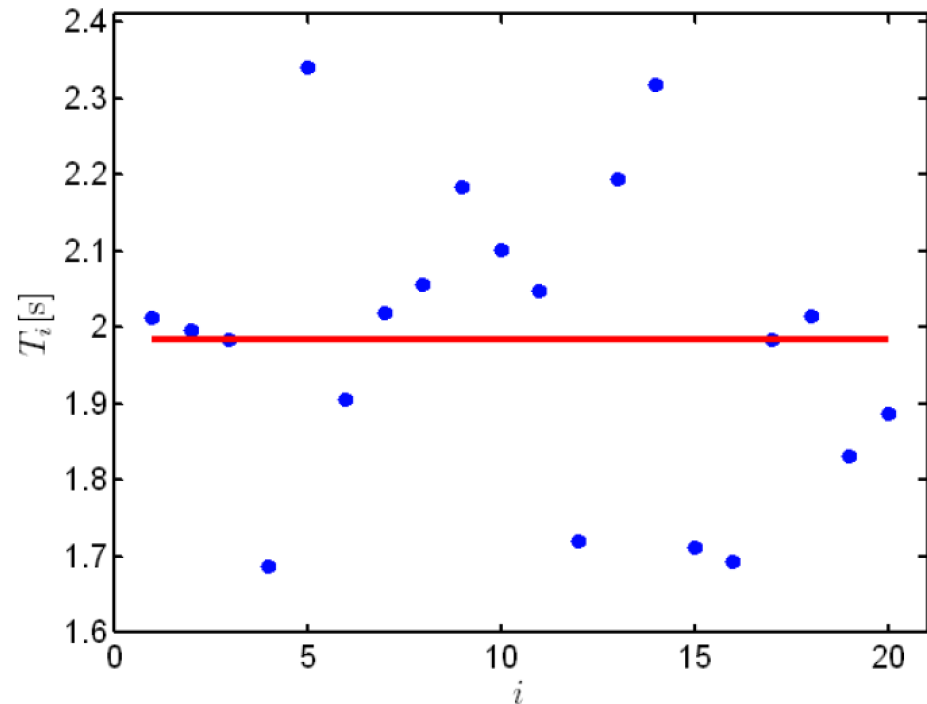


Naszym zadaniem jest podanie wyniku i jego niepewności !

Wartość oczekiwana (prawdziwa)

Najlepszym oszacowaniem wartości oczekiwanej (wartości prawdziwej) jest średnia arytmetyczna wyników pomiarów serii

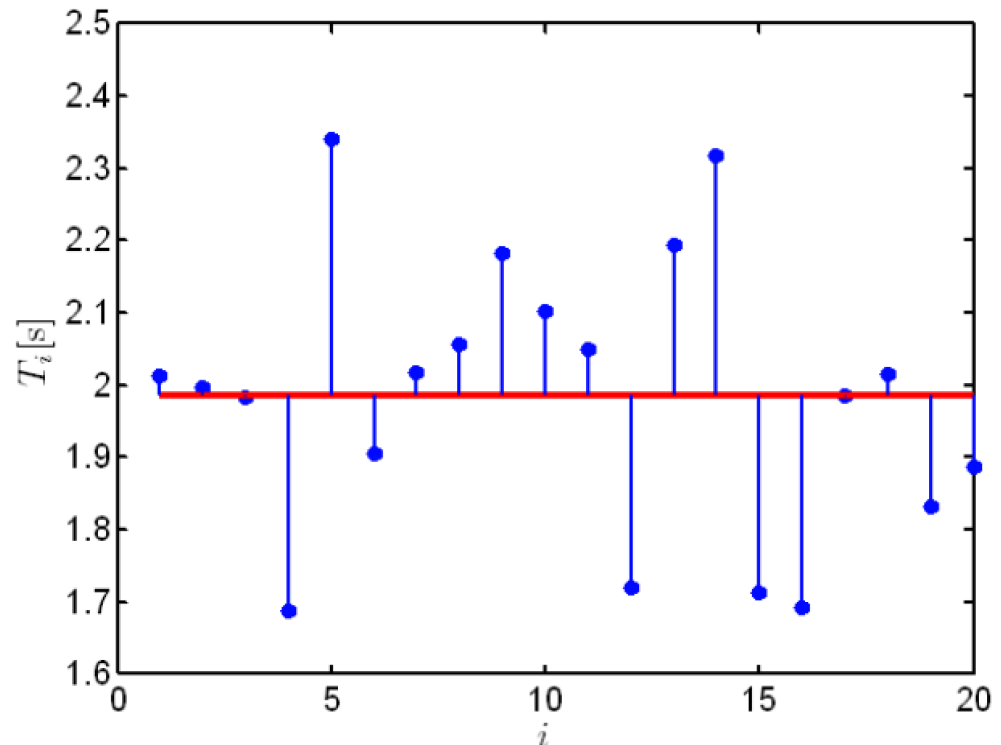
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



Niepewność pojedynczego pomiaru

Wielkością najlepiej opisującą niepewność pojedynczego pomiaru jest rozrzut pomiarów wokół wartości średniej **odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru** [estymator odchylenia standardowego]

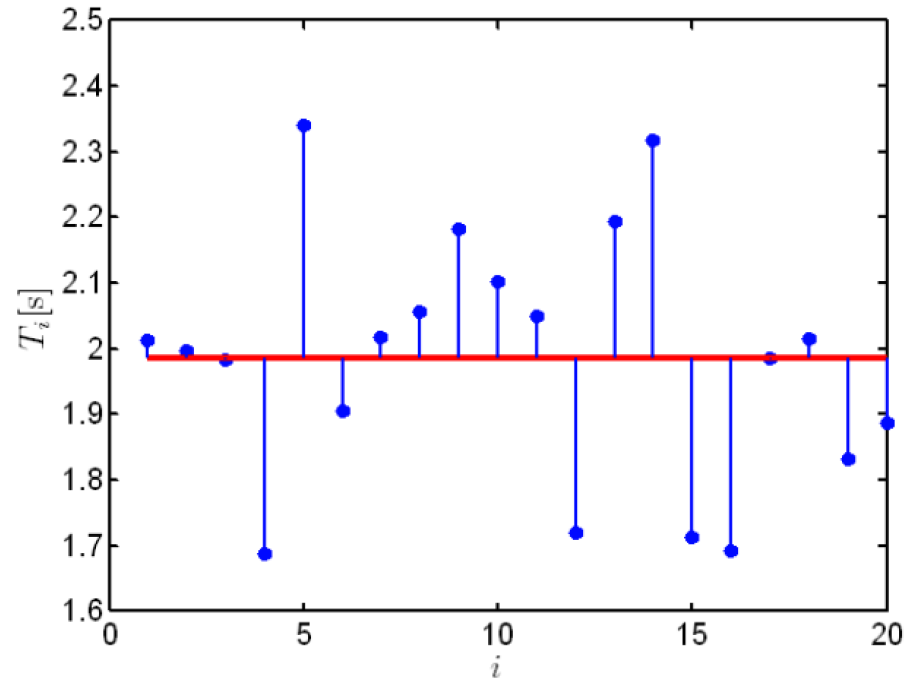
$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



Niepewność wartości oczekiwanej (średniej arytmetycznej)

Wielkością najlepiej opisującą niepewność wyniku jest **odchylenie standardowe średniej arytmetycznej**

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$
$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \quad S_{\bar{x}} < S_x$$



Niepewność średniej można zmniejszać zwiększając liczbę pomiarów!

Pomiar bezpośredni - podsumowanie

Niepewności przypadkowe możemy ograniczyć wykonując wielokrotne pomiary danej wielkości – „budujemy statystykę”

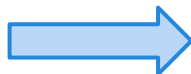
Statystyka pozwala szacować niepewności przypadkowe

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



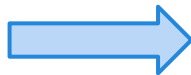
wartość oczekiwana (średnia arytmetyczna)

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



odchylenie standardowe (niepewność standardowa) pojedynczego pomiaru

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

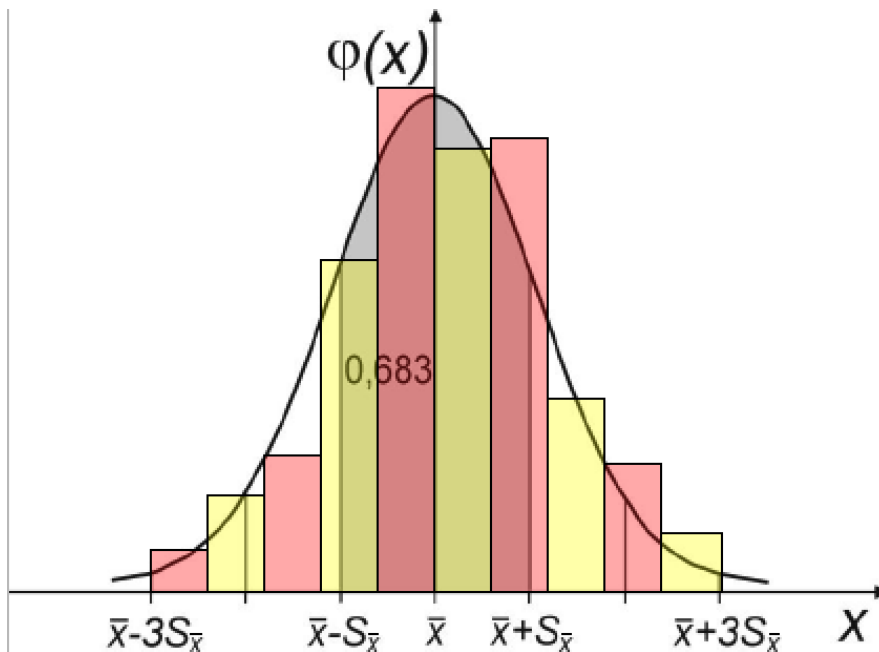


odchylenie standardowe (niepewność standardowa) wartości oczekiwanej

Analiza statystyczna niepewności przypadkowych

Dla niepewności przypadkowych rozkład wielkości mierzonych wokół wartości prawdziwej dany jest **rozkładem Gaussa**

$$\varphi_{(\bar{x}, S_{\bar{x}})}(x) = \frac{1}{S_{\bar{x}} \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2 / 2S_{\bar{x}}^2}$$



Uwaga:

Prawdziwa wartość mierzona wielkości utożsamiana z wartością oczekiwaną

W przedziale $[\bar{x}-S_{\bar{x}}, \bar{x}+S_{\bar{x}}]$ mieści się 68,3% wszystkich wyników

W przedziale $[\bar{x}-3S_{\bar{x}}, \bar{x}+3S_{\bar{x}}]$ mieści się 99,8% wszystkich wyników

Często odchylenie standardowe wielkości średniej (wyniku) oznaczane jest jako σ , a wartość średnia (wartość oczekiwana, wynik) jako x_0

Małe serie pomiarowe - rozkład Studenta

Dla małej liczby pomiarów tj. poniżej 10 ($n < 10$) niepewność standardowa średniej (odchylenie standardowe) daje zaniżoną wartość.

$$S_{\bar{x}} \rightarrow t_{n,\alpha} S_{\bar{x}}$$

$t_{n,\alpha}$ Współczynnik Studenta

n Liczba pomiarów

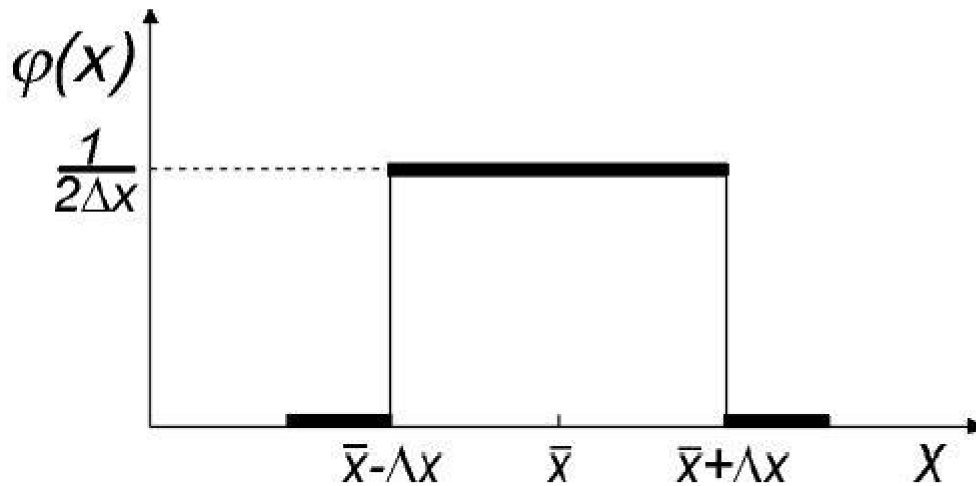
α Poziom ufności

n	$\alpha=0.6828$	$\alpha=0.95$	$\alpha=0.99$
2	1.837	12.706	63.657
3	1.321	4.303	9.926
4	1.197	3.182	5.841
5	1.141	2.776	4.604
6	1.11	2.58	4.032
7	1.09	2.447	3.707
8	1.077	2.365	3.5
9	1.066	2.306	3.355
10	1.059	2.252	3.25

Poziom ufności – prawdopodobieństwo z jakim wyznaczony przedział zawiera wartość rzeczywistą mierzonej wielkości.

Całkowita niepewność pomiarowa

Niepewność systematyczna w ujęciu statystycznym:



$$S_{\bar{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

Całkowita niepewność pomiarowa:

$$\overline{S}_x = \sqrt{S_x^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^2}$$

Niepewność w pomiarach pośrednich

Propagacja odchylenia standardowego i niepewności maksymalnej:

W pomiarach pośrednich istnieją związki funkcyjne pomiędzy poszukiwaną wielkością a wielkościami mierzonymi:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

np.:

$$v = \frac{l}{t}$$

Wartość oczekiwana tej wielkości jest funkcją z wartości oczekiwanych jej poszczególnych zmiennych:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

np.:

$$\bar{v} = \frac{\bar{l}}{\bar{t}}$$

Odchylenie standardowe tej poszukiwanej wielkości jest funkcją odchyłeń wielkości mierzonych:

$$S_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} S_{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} S_{\bar{x}_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} S_{\bar{x}_n}\right)^2}$$

np.:

$$S_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} S_{\bar{l}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{l}}{\bar{t}^2} S_{\bar{t}}\right)^2}$$

Pochodne

Teoria

Pochodna funkcji potęgowej

$$f(x) = Ax^n \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = Anx^{n-1}$$

$$f(x) = 3x^{2/3} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^{-1/3}$$

Pochodna funkcji wykładniczej

$$f(x) = Ae^{Bx} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = AB e^{Bx}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} e^{-3.8x} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -5,7 e^{-3.8x}$$

Pochodna funkcji logarytmicznej

$$f(x) = A \ln Bx \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{AB}{x}$$

$$f(x) = 2 \ln \frac{x}{3} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3x}$$

Pochodna funkcji złożonej

$$f(x) = f_1(f_2(x)) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$f(x) = x^{1/x} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} x^{1/x-1}$$

Pochodna sumy i różnicy funkcji

$$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \pm \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{3} \ln 2x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{2}{3x}$$

Przykłady

Średnia ważona

Dwa pomiary (serie pomiarowe) tej samej wielkości ze znacząco różnymi niepewnościami:

$$\begin{array}{ll} \bar{x}_A & S_{\bar{x}_A} \\ \bar{x}_B & S_{\bar{x}_B} \end{array}$$

$$\bar{x}_w = \frac{W_A \bar{x}_A + W_B \bar{x}_B}{W_A + W_B}$$

(Średnia ważona)

$$S_{\bar{x}_w} = \frac{1}{\sqrt{W_A + W_B}}$$

(odchylenie średniej)

$$W_A = \frac{1}{S_{\bar{x}_A}^2} \quad W_B = \frac{1}{S_{\bar{x}_B}^2}$$

(wagi)

Porównanie zmierzonych wartości

Porównanie z wielkością tablicową

$$|\bar{x} - x_{tab}| < \Delta x$$

zgodność

Porównanie dwóch zmierzonych wielkości

$$|\bar{x}_A - \bar{x}_B| < \Delta x_A + \Delta x_B$$

zgodność

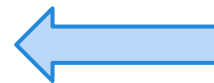
Zapis wyniku pomiaru

Zawsze podaje się tylko **dwie cyfry znaczące** estymatora niepewności.

Liczmy co najmniej trzy i zaokrąglamy zawsze do góry.

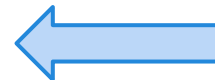
Wynik pomiaru obliczamy o co najmniej jedno miejsce dziesiętne dalej niż miejsce dziesiętne, na którym zaokrąglono błąd, a następnie zaokrąglamy wg. normalnych reguł do tego samego miejsca dziesiętne, do którego zaokrąglono błąd.

$$\bar{g} = 9.8145467 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.21434 \frac{m}{s^2}$$



notatki, kalkulator

$$\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$$



wynik końcowy pomiaru

$$g = (9.81 \pm 0.22) \text{ m/s}^2$$

~~$$\bar{g} = 9.814 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$$~~

~~$$\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.214 \frac{m}{s^2}$$~~

Graficzne przedstawienie wyników pomiaru

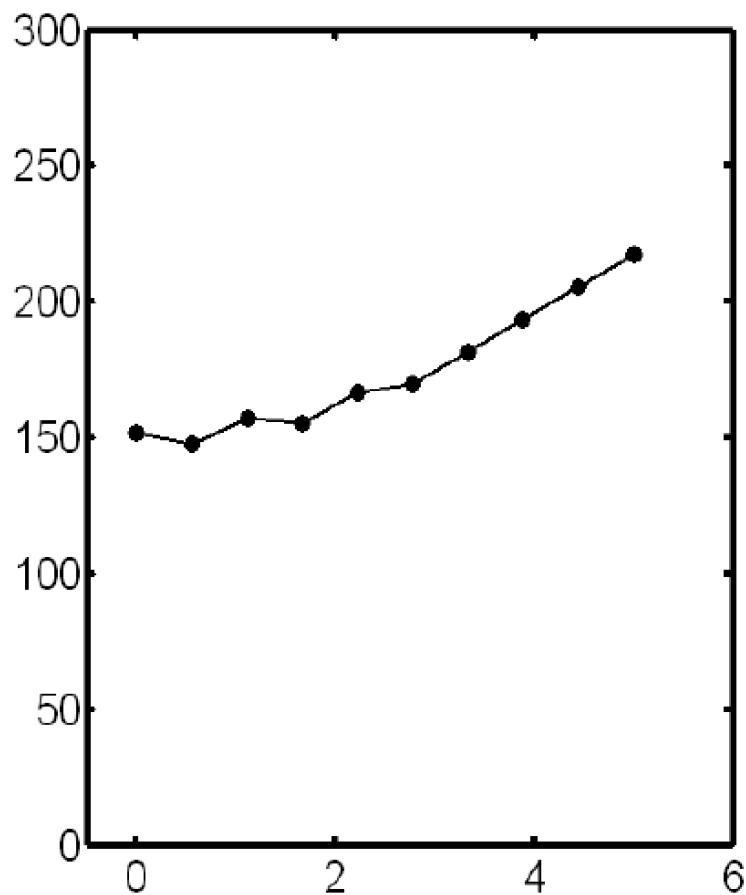
Najbardziej efektywny sposób przedstawienia wyników pomiarów

Pozwalają m.in. na:

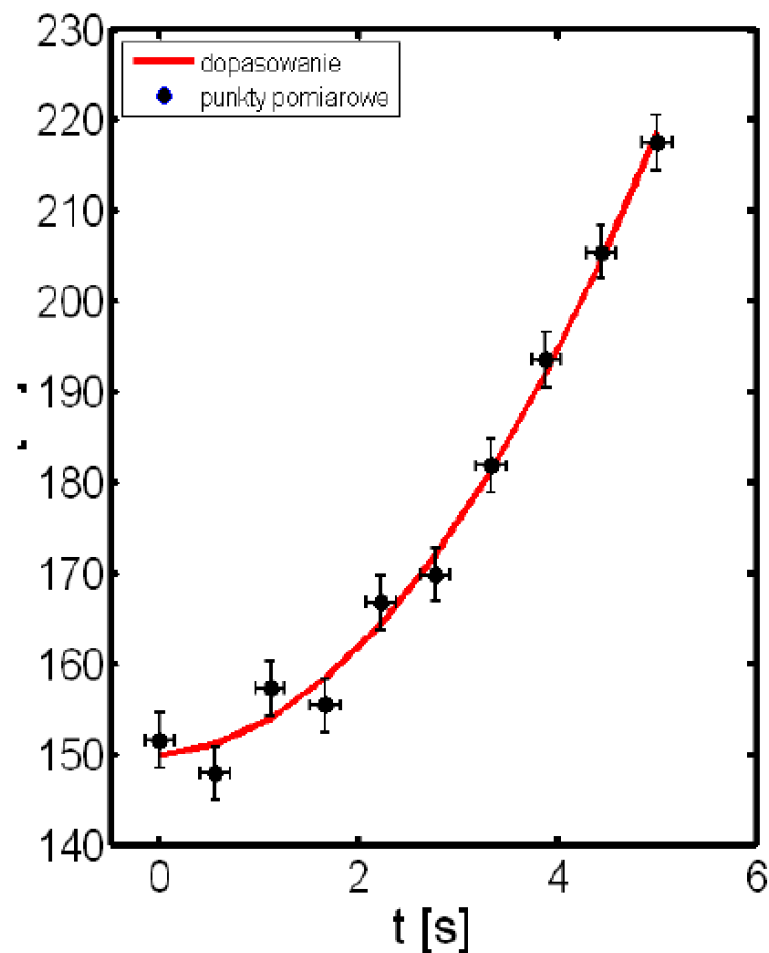
- Oglądowe przedstawienie wyników
- Wyznaczenie zależności między zmierzonymi wielkościami
- Testowanie modeli
- Oszacowanie wielkości fizycznych

Graficzne przedstawienie wyników pomiaru

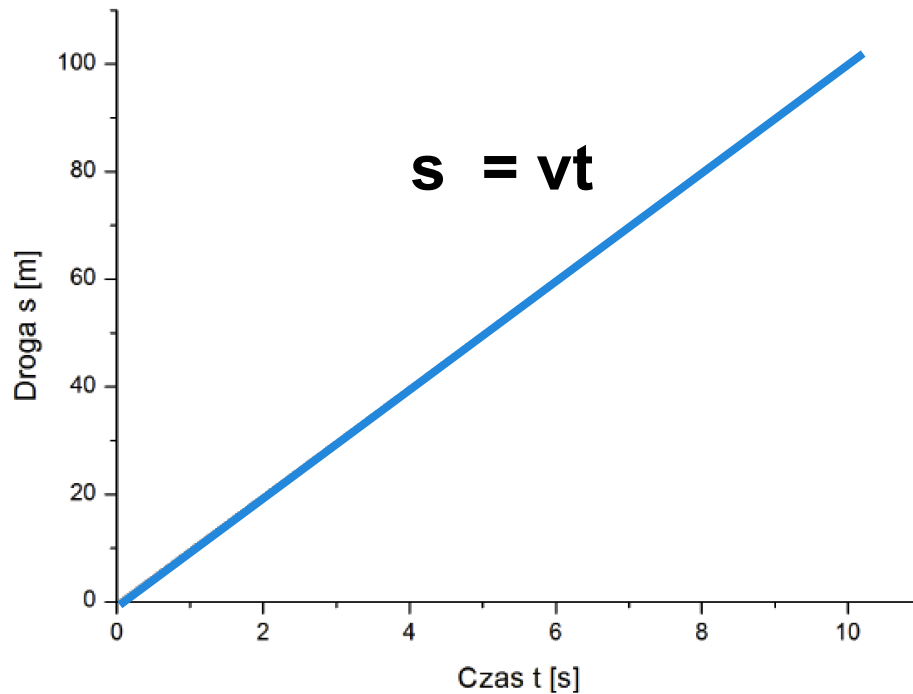
źle



dobrze



Regresja liniowa

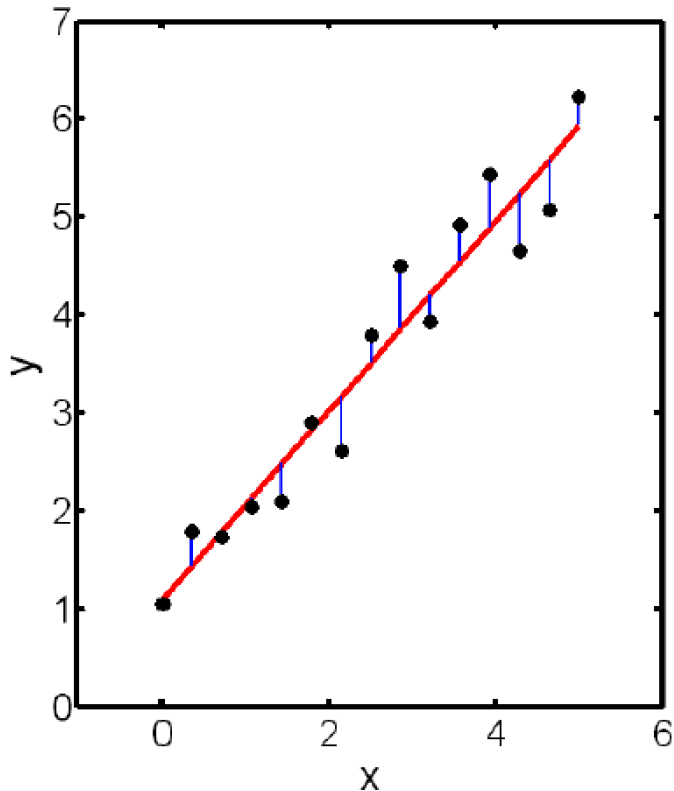


Wiele wielkości ma charakter liniowy !

$$y = ax + b$$

Regresja liniowa

$$y = ax + b$$



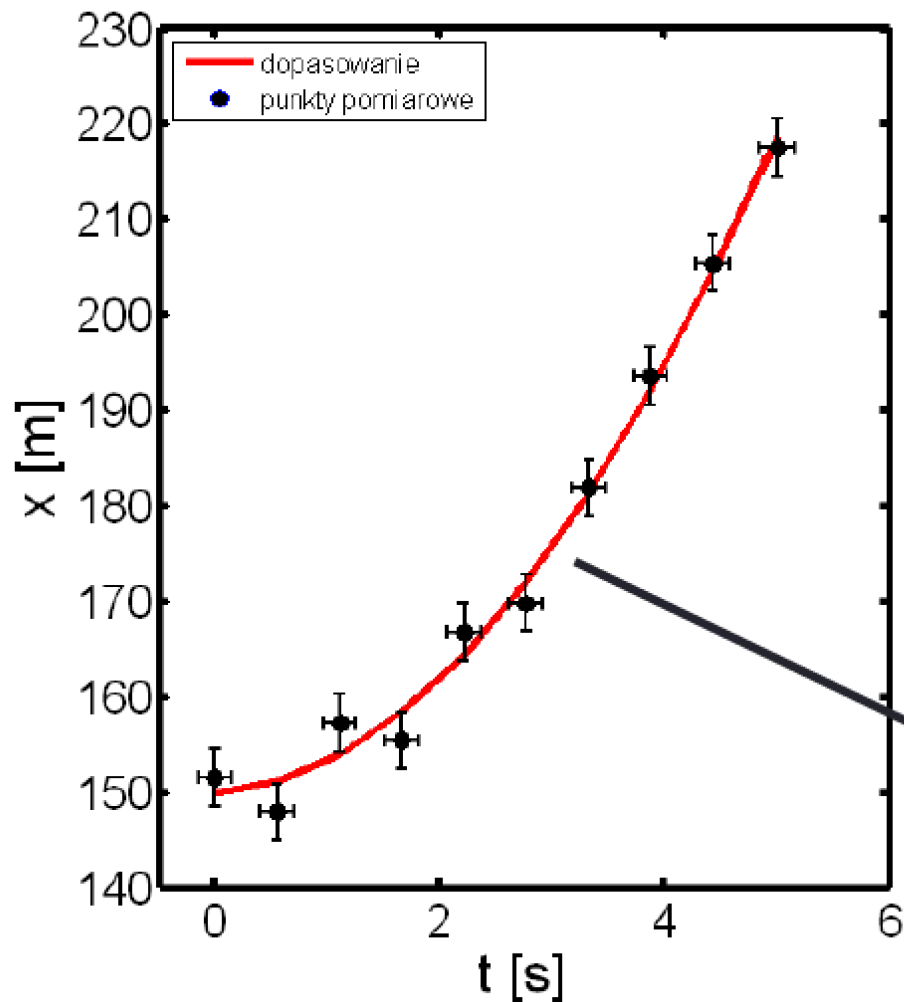
$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$S_a = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i}{n-2} \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}$$

$$S_b = S_a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

Dopasowanie innych zależności funkcyjnych



$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$$

a, V_0, x_0

Literatura

- ❖ *I Pracownia fizyczna*, red. A. Magiera, OWI Kraków 2006
- ❖ H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN Warszawa 1999
- ❖ A. Zięba, *Postępy Fizyki*, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247
- ❖ B. Kamys, *Statystyczne Metody Opracowania Pomiarów I*
(http://users.uj.edu.pl/~ufkamys/BK/smop1N_h.pdf)

- ❖ **Programy do opracowywania danych**
 - Excel
 - Mathematica
 - Statistica
 - Matlab
 - Origin**