

Poprzedni wykład

Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$

Reguła całkowitego prawdopodobieństwa (B_i tworzą partycję)

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Wzór Bayesa

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Analiza bayesowska

Zagadnienia na kartkówkę nr 1 są na stronie www.kursu

1

Analiza bayesowska (jakościowy przykład wyników)

- Rzut monetą: do wyznaczenia $P(O)$
a priori + eksperyment 90 orłów w 100 rzutach → a posteriori

- $P(O)=0.5$
→ analiza doprowadzi do $P(O) \approx 0.86$
- $P(O)$ – rozkład wokół 0.5
→ analiza doprowadzi do rozkładu wokół $P(O) \approx 0.86$
- $P(O)$ – rozkład wokół 0.3
→ analiza doprowadzi do rozkładu wokół $P(O) \approx 0.80$
- $P(O)$ – rozkład jednorodny na $[0,1]$
→ analiza doprowadzi do rozkładu wokół $P(O) \approx 0.90$

Im więcej danych tym bardziej różne $P(O)$ a priori będą zbiegać się do tego samego $P(O)$ a posteriori.

2

Wzór „łańcuchowy”

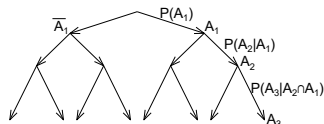
Zał. $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$

Wtedy zachodzi wzór:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

-dowód – iteracja definicji prawdopodobieństwa warunkowego

-uzasadnia metodę „drzewka”



3

Niezależność zdarzeń

- Dwa zdarzenia A i B ($P(A)>0$ i $P(B)>0$) są **niezależne** gdy:

$$P(A|B) = P(A) \quad \wedge \quad P(B|A) = P(B)$$

- Warunek wystarczający i konieczny niezależności:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

4

Niezależność zdarzeń

- Dowód $\Rightarrow$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad / \cdot P(B)$$

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

- Dowód $\Leftarrow$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B)P(B) = P(A)P(B) \quad / : P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

- Analogicznie dla drugiej równości $P(B|A)=P(B)$

5

Niezależność zdarzeń

- Zdarzenia niezależne nie muszą być rozłączne
Tw. Jeżeli zdarzenia A i B są rozłączne i niezależne to $P(A)=0$ lub $P(B)=0$ lub $P(A)=P(B)=0$

Dowód:

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \quad (\text{z rozłączności})$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (\text{z niezależności})$$

czyli

$$P(A)P(B) = 0$$

- Nie należy mylić **niezależności** zdarzeń z **rozłącznością** zdarzeń!

6

Niezależność zdarzeń

- Warunek wystarczający i konieczny **niezależności warunkowej**: $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$
- Nie należy mylić niezależności zdarzeń z niezależnością warunkową zdarzeń!
- Zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami niezależne** gdy:
 $\forall i \neq j: P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$
 ((n-1)n/2 warunków)
- Zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ są globalnie niezależne** gdy:
 $\forall k \leq n: P(A_{k1} \cap A_{k2} \cap \dots \cap A_{kk}) = P(A_{k1})P(A_{k2}) \dots P(A_{kk})$
 gdzie A_{kj} to dowolne, różne zdarzenia spośród zdarzeń $A_1, \dots, A_n$.

7

Zmienne losowe

Syt. Eksperyment losowy E i związana z nim przestrzeń zdarzeń S, zbudowana ze zdarzeń s.

- Zmienną losową** nazywamy funkcję X, która każdemu zdarzeniu $s \in S$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $X(s)=x$

$$\forall s \in S \xrightarrow{X(s)} x \in S_X$$

- X – nazwa zmiennej losowej (funkcji)
- x – wartości zmiennej losowej X
- S_X – zbiór wartości zmiennej losowej X (dyskretny $\rightarrow$ dyskretna zmienna losowa; ciągły $\rightarrow$ ciągła zmienna losowa; mieszany $\rightarrow$ mieszana zmienna losowa)

Np. rzut kostką; X=liczba wyrzuconych oczek; $S_X=\{1,2,3,4,5,6\}$

Np. rzut kostką; X=kwadrat liczby wyrzuconych oczek; $S_X=\{1,4,9,16,25,36\}$

Np. rzut kostką; X=odległość od „4”; $S_X=\{3,2,1,0,1,2\}=\{0,1,2,3\}$

Np. rzut kostką; X=liczba rzutów aż wypadnie sześć oczek; $S_X=\{1,2,3,\dots\}$

8

Zmienne losowe

- Dla jednego eksperymentu można zdefiniować wiele zmiennych losowych
- Zbiór wartości S_X ma nie więcej elementów niż przestrzeń S
- Jeżeli S jest dyskretna to S_X jest dyskretny
- Jeżeli S jest ciągłą przestrzenią to S_X może być ciągły lub dyskretny

Np. losujemy liczbę a z przedziału $<0,10$; $X=a^2$; $S_X=<0,100$

Np. losujemy liczbę a z przedziału $<0,10$; X=część całkowita a; $S_X=\{0,1,2,\dots,9\}$

Typy zmiennych losowych

- Dyskretna zmienna losowa** – zmienna, która przyjmuje co najwyżej przeliczalnie nieskończoną liczbę wartości
- Ciągła zmienna losowa** – zmienna, która przyjmuje nieskończenie wiele (w sposób nieprzeliczalny) wartości
- Mieszana zmienna losowa** – zmienna, która przyjmuje nieskończenie wiele (w sposób nieprzeliczalny) wartości, a niektóre spośród jej wartości są wielkościami dyskretnymi. Jest zdefiniowana jednocześnie na dyskretnym zbiorze zdarzeń (skończonym lub przeliczalnie nieskończonym) i ciągłym zbiorze zdarzeń (nieprzeliczalnie nieskończonym)

9

Zmienne losowe

$$\forall s \in S \xrightarrow{X(s)} x \in S_X$$

Zdarzeniem ze względu na S_X nazywamy podzbiór S_X .

- Zdarzenie $A \in S$ i zbiór wartości $A_X \in S_X$ są równoważne (ekwiwalentne) gdy

$$\begin{aligned} \forall s \in A: X(s) \in A_X \\ \forall s_X \in A_X: \exists s \in S: X(s) = s_X \end{aligned}$$

- Inaczej mówiąc zdarzenie A i zdarzenie (ze względu na S_X) A_X są równoważne, wówczas $P(A)=P(A_X)$

- Czyli **zamiast operować na zdarzeniach możemy operować na zbiorach wartości w przestrzeni S_X**

Przykład: Eksperyment: rzucamy trzy razy uczciwą monetą
 $S=\{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$, zdarzenia elementarne równoprawdopodobne

Zdarzenie A: wypadła parzysta liczba orłów

Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: $\{OOR, ORO, ROO, RRR\}$

$$P(A)=4/8=1/2$$

Zmienna losowa X – liczba orłów w trzech rzutach

Zbiór wartości X: $S_X=\{0,1,2,3\}$, $P(X)=\{1/8, 3/8, 3/8, 1/8\}$

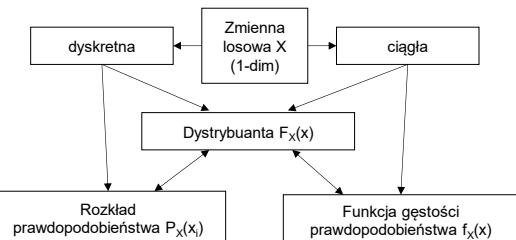
Zdarzenie ze względu na S_X : A_X – liczba orłów w trzech rzutach jest parzysta: $\{0,2\}$

$$P(A_X)=1/8+3/8=1/2$$

Czyli zdarzenie „wypadła parzysta liczba orłów” jest równoważne w tym eksperymencie zdarzeniu „liczba orłów wynosiła 0 lub 2”

10

Zmienna losowa i funkcje ją opisujące



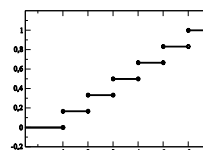
11

Dystrybuanta

- Dystrybuantą** zmiennej losowej X nazywamy funkcję dającą prawdopodobieństwo otrzymania wartości zmiennej losowej mniejszej bądź równej od danej wartości x:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Przykład:
Dystrybuanta w rzucie kostką



12

Dystrybuenta - własności

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$ (gdyż $F_X(x)$ jest sumą prawdopodobieństw)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ (gdyż zdarzenie $x \leq +\infty$ jest pewne)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ (gdyż zdarzenie poniżej $\min\{x\}$ jest niemożliwe)
- $F_X(x)$ jest niemalejąca tzn. $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ gdyż zdarzenie $\{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$
- $F_X(x)$ jest ciągła prawostronnie $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} (F_X(x+\delta) - F_X(x)) = 0$
- $F_X(x)$ jest ciągła dla ciągłych zmiennych losowych
- $F_X(x)$ jest bezwymiarowa

13

Związek dystrybenty z prawdopodobieństwem

■ Tw. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

■ Dow:

Zdarzenie $\{X \leq b\} \equiv \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$ /P()

rozłączne

$$P(\{X \leq b\}) = P(\{X \leq a\}) + P(\{a < X \leq b\})$$

$$F_X(b) = F_X(a) + P(\{a < X \leq b\})$$

$$P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$$

14

Związek dystrybenty z prawdopodobieństwem - wnioski

- Wniosek 1
Weźmy $a = x - \delta$, $b = x$
 $P(x - \delta < X \leq x) = F_X(x) - F_X(x - \delta)$ / $\lim_{\delta \rightarrow 0}$
 $P(X = x) = F_X(x) - \lim_{\delta \rightarrow 0} F_X(x - \delta)$
ale dla ciągłej zmiennej losowej $\lim_{\delta \rightarrow 0} F_X(x - \delta) = F_X(x)$
zatem $\forall x: P(X = x) = F_X(x) - F_X(x) = 0$
- Wniosek 2 (z Wniosku 1)
 $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
(związek z prawdopodobieństwem geometrycznym)

15

Dystrybuenta warunkowa

Syt:

X-zmienna losowa,
A – zdarzenie takie, że $P(A) > 0$

- **Dystrybuentą warunkową** zmiennej losowej X pod warunkiem, że zaszło zdarzenie A nazywamy funkcję

$$F_X(x | A) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap A)}{P(A)}$$

16

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa

- Syt:
X – **dyskretna** zmienna losowa
 S_X – odpowiedni zbiór wartości zmiennej X
- **Funkcją rozkładu prawdopodobieństwa** $P_X(x_k)$ nazywamy funkcję przyporządkowującą wartościom zmiennej losowej prawdopodobieństwo jej wystąpienia
 $\forall k: P_X(x_k) = P(X = x_k)$

17

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa - własności

- $P_X(x_k) \geq 0$ (własność prawdopodobieństwa)
- $\sum_k P_X(x_k) = 1$ gdyż $P(S_X) = P(S) = 1$
- dla $x_1 < x_2 < \dots$ oraz $k > 1$ mamy
 $P_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$
- $P_X(x_k)$ jest bezwymiarowe

18

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

- Syt:
X – **ciągła** zmienna losowa o różniczkowalnej dystrybuancie
S_X – odpowiedni zbiór wartości zmiennej X
- Funkcją gęstości prawdopodobieństwa** $f_X(x)$ nazywamy funkcję

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$P(x < X \leq x + \varepsilon) = F_X(x + \varepsilon) - F_X(x) = \frac{F_X(x + \varepsilon) - F_X(x)}{\varepsilon} \varepsilon \xrightarrow{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}} \frac{dF_X(x)}{dx} \varepsilon$$

19

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa - własności

- $f_X(x) \geq 0$
- $P(x < X \leq x + dx) = P(x \leq X < x + dx) = \dots = f_X(x) dx$
- $\int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{d}{dt} F_X(t) dt = F_X(t) \Big|_{-\infty}^x = F_X(x) - 0 = F_X(x)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = F_X(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 - 0 = 1$
- $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt$
- $[f_X(t)] = \frac{1}{[x]}$ (wymiar)

20

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa własności

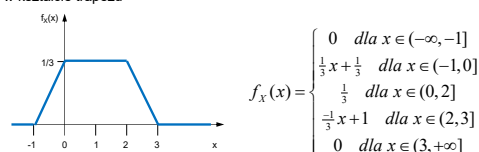
- Uwaga 1:
Jeżeli zmienna losowa X przyjmuje wartości tylko z pewnego obszaru to poza tym obszarem definiujemy $f_X(x)=0$
- Uwaga 2:
Zarówno funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jak i funkcja gęstości prawdopodobieństwa muszą być znormalizowane, gdy tak nie jest należy przeprowadzić normalizację $f_X(x) \rightarrow N \cdot f_X(x)$
- Warunkową funkcją gęstości prawdopodobieństwa** nazywamy funkcję

$$f_X(x | A) = \frac{d}{dx} F_X(x | A)$$

21

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

Syt: Zmienna losowa X opisywana jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa w kształcie trapezu



- Wysokość trapezu obliczamy z warunku normalizacji
 $\text{Pole trapezu} = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{(4+2) \cdot h}{2} = 3h \rightarrow 1 = 3h \rightarrow h = \frac{1}{3}$
- Funkcję gęstości prawdopodobieństwa obliczamy wiedząc przez jakie punkty przechodzą poszczególne odcinki

22

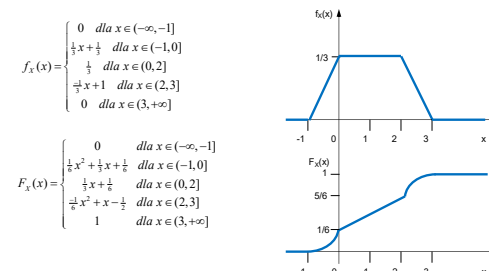
Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Obliczamy dystrybuantę $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$
- $$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{3}x + 1 & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 0 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$
- dla $x \in (-\infty, -1]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$
- dla $x \in (-1, 0]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x (\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}) dt = 0 + (\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}t) \Big|_{-1}^x = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}(-1)^2 - \frac{1}{3}(-1) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
- dla $x \in (0, 2]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x \frac{1}{3} dt = F_X(0) + \int_0^x \frac{1}{3} dt = (\frac{1}{6} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{3}t) \Big|_0^x = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
- dla $x \in (2, 3]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^2 \frac{1}{3} dt + \int_2^x (-\frac{1}{3}t + 1) dt = F_X(2) + \int_2^x (-\frac{1}{3}t + 1) dt = (\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6}) + (-\frac{1}{6}t^2 + t) \Big|_2^x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}x^2 + x - (-\frac{1}{6} \cdot 2^2 + 2) = -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6}$
- dla $x \in (3, +\infty]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^3 f_X(t) dt + \int_3^x 0 dt = F_X(3) + 0 = -\frac{1}{6} \cdot 3^2 + 3 - \frac{1}{6} = 1$

23

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Łącznie funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta



ciąg dalszy przykładu za tydzień

24