Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 2

1. Na płaszczyznę naniesiono siatkę kwadratową o boku a. Na płaszczyznę rzucono losowo monetę o promieniu $r < \frac{a}{2}$. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że moneta nie upadnie na ani jeden bok kwadratu. Proszę otrzymany wynik potwierdzić numerycznie.

2. Do komputera nadchodzą dwa sygnały z równym prawdopodobieństwem w czasie $[0, T]$. Jeśli przyjdą odległe w czasie o mniej niż τ to komputer zawiesza się. Jakie jest prawdopodobieństwo zawieszenia komputera ?

3. Rzucamy dwoma rozróżnialnymi monetami (np. nr 1 i nr 2). Niech zdarzenie A oznacza wypadnięcie orła na monecie nr 1, zdarzenie B oznacza wypadnięcie orła na monecie nr 2, a zdarzenie C oznacza wypadnięcie orła dokładnie na jednej monecie. Proszę sprawdzić niezależność zdarzeń A i B, A i C, B i C oraz A i B i C.

4. Wiadomo, że na pewną chorobę choruje 1 osoba na 1000. Test wykrywający tę chorobę daje następujące wyniki:

   - pozytywny - z prawdopodobieństwem 95% gdy badana jest chora osoba, (jest to tzw. czułość testu)
   - negatywny - z prawdopodobieństwem 5% gdy badana jest chora osoba,
   - pozytywny - z prawdopodobieństwem 5% gdy badana jest zdrowa osoba,
   - negatywny - z prawdopodobieństwem 95% gdy badana jest zdrowa osoba, (jest to tzw. swoistość testu)

   Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której wyszedł pozytywny wynik rzeczywiście jest chora?

5. Osoba z poprzedniego zadania powtórzyła test i otrzymała znowu wyniki pozytywny. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo, że osoba jest rzeczywiście chora? Jak zmieni się ono przy trzecim powtórzeniu testu (z wynikiem pozytywnym)?

6. Pewna osoba z prawdopodobieństwem 0.5 dziedziczy chorobę genetyczną. Swoistość testu wykrywającego tę chorobę wynosi 0.8, a jego czułość 0.9. Proszę policzyć prawdopodobieństwo, że osoba choruje gdy:

   - wykonała jeden test (wynik ujemny)
   - wykonała dwa testy (wyniki kolejno ujemny i dodatni)
   - wykonała trzy testy (wyniki kolejno ujemny, dodatni, ujemny)
   - wykonała trzy testy (wyniki kolejno ujemny, dodatni, dodatni)
   - wykonała trzy testy (wyniki kolejno dodatni, ujemny, ujemny)

7. Zadanie komputerowe dla chętnych, aspirujących do podwyższenia oceny z całości kursu.

   Proszę dokonać numerycznej symulacji zadania 7 z zestawu 1. W tym celu:

   a). Proszę uruchomić generator liczb pseudolosowych wbudowany w używany język i (jeśli występuje) zapoznać się z rolą ziarna generatora. W efekcie powinniście Państwo generować liczby pseudolosowe o rozkładzie jednorodnym w przedziale (0,1) różne dla kolejnych uruchomień programu.

   b). Zasymulować pojedyncze wyciąganie trzech kart z tali 52 zwracając informację czy wśród wylosowanych kart jest trefl.

   c). Powtórzyć losowanie z pkt. b) wielokrotnie, i zbadać ile powtórzeń losowania należy wykonać aby osiągnąć granicę (z dokładnością 0.1%) częstotliwości odpowiadającą prawdopodobieństwu wyznaczonemu w zadaniu 7 z zestawu 1.

8. Zadanie komputerowe dla chętnych, aspirujących do podwyższenia oceny z całości kursu.

   Napisać program (np. w języku C) wykorzystujący standardowy generator liczb pseudolosowych do wyznaczenia liczby π. Można to zrobić w następujący sposób: załóżmy, że strzelamy do kwadratowej tarczy o rozmiarze 1×1 i sprawdzamy czy punkt trafienia leży w ćwiartce koła o środku w jednym (wybranym) z rogów tarczy i promieniu R=1. Z definicji prawdopodobieństwa geometrycznego wynika, że prawdopodobieństwo P trafienia w ćwiartkę koła wynosi $P = \frac{1}{4}\pi$. Aby zbadać to numerycznie program powinien generować dwie liczby pseudolosowe z przedziału $(0, 1)$, które opisują miejsce trafienia w tarczę. Następnie sprawdzamy czy odległość punktu trafienia od wybranego rogu tarczy jest mniejsza niż 1. Powtarzając strzelanie do tarczy N razy możemy numerycznie znaleźć wartość $P^{num} = \frac{N_t}{N}$, gdzie N_t oznacza ilość trafień w ćwiartkę koła i stąd wyliczyć π. Proszę wyznaczyć liczbę π dla różnych wartości N, np: $N = 10, 10^2, 10^3, 10^5$.