Poprzednim razem

- Wartość oczekiwana (expectation value)

$$E(X) = \sum_k P_X(x_k)\, x_k$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, x\, dx$$

- Wariancja $var(X) \equiv \sigma_X^2 \equiv \sigma^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$

$$var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

- Odchylenie standardowe $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$

- E(X) i var(X) dla rozkładu jednorodnego na przedziale [a,b]

$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ dla x∈ [a, b]

→ $E(X) = \frac{a+b}{2}$ oraz $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2}$

1

Niepewności pomiarowe - dygresja

- Niepewności systematyczne (dokładność przyrządu, wydajność przyrządu, przybliżenia teoretyczne, …)
- Niepewności statystyczne (pochodzące od losowej natury zjawiska i/lub czynników poza naszą kontrolą). Uwidaczniają się przy powtarzaniu eksperymentu.

- Zał: zmierzona wartość X, oszacowana niepewność systematyczna Δ, oszacowane odchylenie standardowe σ(X)

- Zapis wyniku: X(σ(X))± Δ lub (mniej precyzyjne) X±σ(X)±Δ
  Np. X=2.34 Δ=0.01 σ(X) =0.12: 2.34(12) ±0.01 lub 2.34 ±0.12 ±0.01
  W tym przykładzie Δ<< σ(X) i wtedy Δ pomijamy: 2.34 ±0.12

Ale czasami chcemy podać jedną niepewność (=połączyć Δ oraz σ(X))

Nie ma dobrej teorii, która pokazuje jak to zrobić.

Istnieje teoria jak łączyć niepewności statystyczne z różnych źródeł

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + \ldots}$$

Niektórzy zakładają, że niepewność systematyczna ma rozkład jednorodny co pozwala w miejsce Δ używać $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta$ co prowadzi do wzoru $\sigma = \sqrt{(\sigma_{stat})^2 + \frac{1}{3}\Delta^2}$

2

Inne parametry - momenty

- **Momentem rzędu k względem początku układu współrzędnych** dla zmiennej losowej X nazywamy

$$\tilde{\mu}_k \equiv E(X^k) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

czyli $\tilde{\mu}_0 = 1 \qquad \tilde{\mu}_1 = E(X)$

- **Momentem centralnym rzędu k** dla zmiennej losowej X nazywamy

$$\mu_k \equiv E((X - E(X))^k) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

- Czyli $\mu_0 = 1 \qquad \mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = var(X)$
- **Skośność** - miara asymetrii

$$\beta_1 \equiv \frac{\mu_3}{(\sigma(X))^3}$$

- **Kurtoza** - miara skupienia (spłaszczenia)

$$\beta_2 \equiv \frac{\mu_4}{(\sigma(X))^4} - 3$$

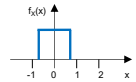
3

Przykład: rozkłady trójkątne

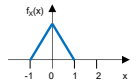
- Rozkład jednorodny na $x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

spr. (normalizacja) $N = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

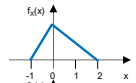
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & dla\ x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 0 & dla\ x \notin \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$



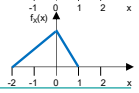
- Rozkład trójkątny I $f_X(x) = \begin{cases} x+1 & dla\ x \in (-1,0] \\ 1-x & dla\ x \in (0,1) \\ 0 & dla\ x \notin (-1,1) \end{cases}$



- Rozkład trójkątny II $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & dla\ x \in (-1,0] \\ \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} & dla\ x \in (0,2) \\ 0 & dla\ x \notin (-1,2) \end{cases}$



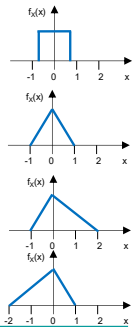
- Rozkład trójkątny III $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & dla\ x \in (-2,0] \\ \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3} & dla\ x \in (0,1) \\ 0 & dla\ x \notin (-2,1) \end{cases}$



4

Przykład: rozkłady trójkątne

	Prostokątny	Trójkątny I	Trójkątny II	Trójkątny III
E(X)	0	0	1/3	-1/3
E(X²)	1/6	1/6	1/2	1/2
var(X)	1/6=0.16(6)	0.16(6)	7/18=0.38(8)	7/18
σ(X)	0.41	0.41	0.62	0.62
μ_3	0	0	2/27=0.07	-2/27
μ_4	0.05	0.06(6)	49/135=0.36	49/135
β_1	0	0	0.305	-0.305
β_2	-1.2	-0.6	-0.6	-0.6



5

Transformacje zmiennych losowych

Syt. X – zmienna losowa
g(X) – funkcja o wartościach rzeczywistych
Y=g(X) też jest zmienną losową

Pytanie: jak wygląda rozkład prawdopodobieństwa (funkcja gęstości prawdopodobieństwa) zmiennej losowej Y

- Zmienna X jest dyskretna
  Wtedy również Y jest dyskretne. Niech x_i dla *i=1,…,j* są takie, że $g(x_i)=y_k$. Wtedy

$$P_Y(y_k) = \sum_{i=1}^{j} P_X(x_i)$$

Przykład:
$S_X=\{-2,0,2\}$ P(X=-2)=1/4 P(X=0)=1/4 P(X=2)=1/2
$Y=X^2$
$S_Y=\{0,4\}$ P(Y=0)=P(X=0)=1/4
P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=1/4+1/2=3/4

6

Transformacje zmiennych losowych

- Zmienna X jest ciągła, g(x) jest ciągłe
  Wtedy również Y jest ciągłe.
- I sposób (przez dystrybuantę)
  Szukamy $F_Y(y)$ a z niej liczymy $f_Y(y)$

- II sposób $$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$
  Ogólny przypadek – sumujemy po przedziałach monotoniczności g(X)
  $$f_Y(y) = \sum_k f_{X,(k)}(x) \cdot \left| \frac{dx_{(k)}}{dy} \right|$$

  Przykłady: $Y=X^2$, $Y=X^4$

7