

Poprzedni wykład

- KARTKÓWKA Z WYKŁADÓW!**
- Zmienna losowa
 $\forall s \in S \xrightarrow{X(s)} x \in X_X$
- Distybuanta
 $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa i funkcja gęstości prawdopodobieństwa
 $\forall k: P_X(x_k) = P(X = x_k)$
 $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$
 $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt$
 $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

1

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

Syt: Zmienna losowa X opisywana jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa w kształcie trapezu

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{3}x + 1 & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 0 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

- Wysokość trapezu obliczamy z warunku normalizacji
 $\text{Pole trapezu} = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{(4+2) \cdot h}{2} = 3h \rightarrow 1 = 3h \rightarrow h = \frac{1}{3}$
- Funkcję gęstości prawdopodobieństwa obliczamy wiedząc przez jakie punkty przechodzą poszczególne odcinki

RPIS 2024/2025 2

2

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Obliczamy dystrybuantę $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$
 $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{3}x + 1 & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 0 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$
- dla $x \in (-\infty, -1]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$
- dla $x \in (-1, 0]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x (\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}) dt = 0 + (\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}t) \Big|_{-1}^x = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}(-1)^2 - \frac{1}{3}(-1) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
- dla $x \in (0, 2]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^0 (\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}) dt + \int_0^x \frac{1}{3} dt = F_X(0) + \int_0^x \frac{1}{3} dt = (\frac{1}{6} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{3}t) \Big|_0^x = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
- dla $x \in (2, 3]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^0 (\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}) dt + \int_0^2 \frac{1}{3} dt + \int_2^x (-\frac{1}{3}t + 1) dt = F_X(2) + \int_2^x (-\frac{1}{3}t + 1) dt = (\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{6}t^2 + t) \Big|_2^x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}x^2 + x - (\frac{1}{6} \cdot 2^2 + 2) = -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6}$
- dla $x \in (3, +\infty)$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^0 (\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}) dt + \int_0^2 \frac{1}{3} dt + \int_2^3 (-\frac{1}{3}t + 1) dt + \int_3^x 0 dt = F_X(3) + 0 = -\frac{1}{6} \cdot 3^2 + 3 - \frac{1}{6} = 1$

RPIS 2024/2025 3

3

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Łącznie funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 1 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

RPIS 2024/2025 4

4

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Generacja liczb pseudolosowych: odwracanie dystrybuanty

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{3}x + 1 & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 0 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 1 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

Uwaga: skala nieliniowa

RPIS 2024/2025 5

5

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Obliczamy funkcję odwrotną do dystrybuanty $F_X^{-1}(x)$
 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 1 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$
- dla $x \in (-1, 0]$: $F_X(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
 $y \in (0, \frac{1}{6}]$ $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
zmiana oznaczeń $x = \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}$
 $x = \frac{1}{6}(y^2 + 2y + 1)$
 $6x = (y+1)^2$
 $y = \sqrt{6x} - 1 \quad x \in (0, \frac{1}{6}]$
- dla $x \in (0, 2]$: $F_X(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
 $y \in (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}]$ $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$
zmiana oznaczeń $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}$
 $x = \frac{1}{3}(y-3)^2 - 6$
 $-6x + 6 = (y-3)^2$
 $-\sqrt{-6x+6} = y-3$
 $y = 3 - \sqrt{6-6x} \quad x \in (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}]$
- dla $x \in (2, 3]$: $F_X(x) = -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6}$
 $y \in (\frac{5}{6}, 1]$ $y = -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6}$
zmiana oznaczeń $x = \frac{1}{6}y^2 + y - \frac{5}{6}$
 $x = \frac{1}{6}(y^2 - 6y + 3)$
 $x = \frac{1}{6}((y-3)^2 - 6)$
 $-6x + 6 = (y-3)^2$
 $-\sqrt{-6x+6} = y-3$
 $y = 3 - \sqrt{6-6x} \quad x \in (\frac{5}{6}, 1]$

RPIS 2024/2025 6

6

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Łącznie $F_x^{-1}(x)$

$$F_x^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{6x} - 1 & \text{dla } x \in (0, \frac{1}{6}] \\ 3x - \frac{1}{2} & \text{dla } x \in (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ 3 - \sqrt{6 - 6x} & \text{dla } x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Generator liczb pseudolosowych o badanej $f_X(x)$:

- Losujemy jednorodnie liczbę x z przedziału $(0,1)$
- Obliczamy $y := F_x^{-1}(x)$ zgodnie z powyższym wzorem
- Zwracamy y
- Liczbę y będącą mialy zadaną funkcję gęstości prawdopodobieństwa w przedziale $(-1,3)$

Kiedy metoda odwracania dystrybuanty nie zadziała (od razu) ?

RPIS 2024/2025 7

7

Odwracanie dystrybuanty jako metoda generowania liczb pseudolosowych

- Syt: dana funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$, chcemy uzyskać liczby pseudolosowe przez nią opisywane.
- Obliczamy dystrybuantę $F_X(x)$.
- Znajdujemy funkcję odwrotną do dystrybuanty $F_x^{-1}(x)$.
- Losujemy liczbę y z przedziału $(0,1)$ używając „standardowego” (zaimplementowanego) generatora liczb pseudolosowych.
- Obliczmy $z = F_x^{-1}(y)$.
- Tak otrzymane liczby opisane są funkcją gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$

RPIS 2024/2025 8

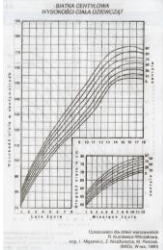
8

Globalny opis dystrybuanty i funkcji gęstości prawdopodobieństwa

- Kwantylem rzędu p** (dla zmiennej losowej X) nazywamy liczbę x_p : $F_X(x_p) = p$ ($0 \leq p \leq 1$)

W szczególności:

- Mediana** to kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$
- Kwartyle** to kwantyle rzędu $\frac{1}{4}$ (pierwszy kwantyl), rzędu $\frac{2}{4}$ (drugi kwantyl), rzędu $\frac{3}{4}$ (trzeci kwantyl)
- Percentyle** to kwantyle rzędu $0.01, 0.02, \dots, 0.99$
- Moda** – wartość najbardziej prawdopodobna czyli $x: \max\{f_X(x)\}$



RPIS 2024/2025 9

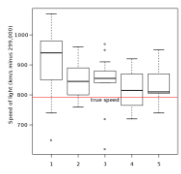
9

Globalny opis dystrybuanty i funkcji gęstości prawdopodobieństwa

- Kwantylem rzędu p** (dla zmiennej losowej X) nazywamy liczbę x_p : $F_X(x_p) = p$ ($0 \leq p \leq 1$)

W szczególności:

- Mediana** to kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$
- Kwartyle** to kwantyle rzędu $\frac{1}{4}$ (pierwszy kwantyl), rzędu $\frac{2}{4}$ (drugi kwantyl), rzędu $\frac{3}{4}$ (trzeci kwantyl)
- Percentyle** to kwantyle rzędu $0.01, 0.02, \dots, 0.99$
- Moda** – wartość najbardziej prawdopodobna czyli $x: \max\{f_X(x)\}$



RPIS 2024/2025 10

10

Wartość oczekiwana

- Wartością oczekiwaną** zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$E(X) = \sum_k P_X(x_k) x_k \quad \text{dla zmiennej dyskretnej}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x dx \quad \text{dla zmiennej ciągłej}$$

- Uwaga 1: $E(X)$ jest średnią ważoną możliwych wartości zmiennej X z wagą daną przez $P_X(x)$ lub $f_X(x)$.
- Uwaga 2: Dla zmiennej typu mieszanego łączymy obie definicje.
- Uwaga 3: Spotyka się też warunkową wartość oczekiwaną, wtedy $P_X(x) \rightarrow P_X(x|A), f_X(x) \rightarrow f_X(x|A)$.

RPIS 2024/2025 11

11

Wartość oczekiwana - własności

- Operator $E(\cdot)$ jest liniowy: $E\left(\sum_{k=1}^n a_k g_k(x)\right) = \sum_{k=1}^n a_k E(g_k(x))$

Stąd (a, b – stałe):

- $E(a) = a$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

Niech Y to nowa zmienna losowa i niech $Y = g(x)$ wtedy

$$E(Y) = \sum_k P_X(x_k) g(x_k) \quad \text{dla zmiennej dyskretnej}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) g(x) dx \quad \text{dla zmiennej ciągłej}$$

a_k – stałe,
 $g_k(x)$ – funkcje o wartościach rzeczywistych

RPIS 2024/2025 12

12

Przykład: wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Niech zmienna losowa X ma rozkład jednorodny na (0,1):

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0,1) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Niech $Y=X^2$.
Znaleźć wartości oczekiwane zmiennych X i Y.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)x dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

czyli aby wyliczyć E(Y) nie musimy znać $f_Y(y)$.
gdybyśmy jednak ją znali to można liczyć $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)y dy$

RPIS 2024/2025 13

13

Wariancja zmiennej losowej

- Wariancją zmiennej losowej nazywamy liczbę:

$$\text{var}(X) \equiv \sigma_X^2 \equiv \sigma^2(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$
- Wariancja jest miarą rozrzutu zmiennej losowej wokół wartości średniej i jest nieujemna
- $\text{var}(a)=0$ dla $a=\text{const}$
- $E(X-E(X))$ nie jest przydatną wielkością, gdyż

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$$
- Odchylenie standardowe zmiennej losowej

$$\sigma_X \equiv \sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$$

RPIS 2024/2025 14

14

Wariancja zmiennej losowej - własności

- $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$
Dowód:

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + b) &= E((aX + b - E(aX + b)))^2 = \\ &= E((aX + b - aE(X) - b)^2) = E((aX - aE(X))^2) = \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) = a^2 E((X - E(X))^2) = a^2 \text{var}(X) \end{aligned}$$
- $\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
Dowód:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - 2E(XE(X)) + E((E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

RPIS 2024/2025 15

15

Przykład: E(X), var(X), σ(X) dla rozkładu jednorodnego

Niech zmienna losowa X ma rozkład jednorodny na [a,b]:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } x \in [a,b] \\ 0 & \text{dla } x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)x dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{2}x^2\right) \Big|_a^b = \frac{1}{2(b-a)}(b^2 - a^2) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)x^2 dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3(b-a)}(b^3 - a^3) = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\text{var}(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}(4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 3b^2 - 6ab) = \frac{1}{12}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b-a}{2}$$

czynniki $\frac{1}{\sqrt{3}}$ pojawia się w teorii błędów pomiarowych

RPIS 2024/2025 16

16

Przykład: E(X), var(X), σ(X) dla rozkładu geometrycznego

Niech zmienna losowa X ma rozkład geometryczny:
 $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \quad k = 1, 2, \dots$
 Rozkład ten jest unormowany, zatem: $\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = 1$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p$$

$$1 = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}$$

$$\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \quad / \cdot p$$

$$\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2} (-1)$$

$$\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-2}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} - \frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \quad / \cdot p$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p - \frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1-p} E(X) - \frac{1}{1-p} \cdot 1 \quad / \cdot (1-p)$$

$$\frac{1-p}{p} = E(X) - 1$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1-p+p}{p} = \frac{1}{p}$$

RPIS 2024/2025 17

17

Przykład: E(X), var(X), σ(X) dla rozkładu geometrycznego

Aby policzyć $E(X^2)$ korzystamy z $E(X)$

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \quad k = 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = \frac{1}{p}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p} \quad / \cdot p$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} (-1) = \frac{1}{p^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2} \quad / \cdot p(1-p)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} p - \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p}{(1-p)} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$E(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \frac{1}{p} \sqrt{1-p}$$

Dla rzutu kostką i wypadnięcia „6”:
 $E(X)=6, \text{var}(X)=30, \sigma(X)=5.48$

RPIS 2024/2025 18

18