

Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 6
Informatyka stosowana, wszystkie grupy

Do rozwiązania niektórych z poniższych zadań przydatne mogą być tablice statystyczne, wystarczą te znajdujące się na stronie kursu. Proszę nauczyć się odczytywać z nich potrzebne wartości.

1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(x_0, \sigma_0^2)$. Znajdź funkcję gęstości prawdopodobieństwa, wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej $Y = A * X + B$.
2. Wiedząc że zmienna losowa X ma rozkład normalny i wartość oczekiwaną $E(X)=0$, znajdź odchylenie standardowe w następujących przypadkach, gdy wiadomo że:
 - (a) Prawdopodobieństwo $P(-4 < X < 4) = 0.954$
 - (b) Prawdopodobieństwo $P(X < -15) = 0.0015$
 - (c) Prawdopodobieństwo $P(-1.348 < X < 1.348) = 0.5$
 - (d) Prawdopodobieństwo $P(X > 4.935) = 0.05$
3. Zmienna losowa Y ma rozkład chi-kwadrat o 13 stopniach swobody. Znajdź prawdopodobieństwo:
 - (a) $P(Y < 5)$
 - (b) $P(Y > 9.3)$
 - (c) $P(7.04 < Y < 8.63)$
4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład podany w tabeli:

y_k / x_i	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
3.0	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00
3.5	0.12	0.04	0.00	0.00	0.00
4.0	0.08	0.08	0.08	0.00	0.00
4.5	0.00	0.12	0.06	0.05	0.04
5.0	0.00	0.00	0.01	0.08	0.08

gdzie X jest średnią ocen w sesji egzaminacyjnej w semestrze III dla losowo wybranego studenta, zaś Y jest średnią ocen tego studenta w sesji egzaminacyjnej w semestrze IV. Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych.

5. Zmienna losowa X ma rozkład jednorodny w przedziale $(0,1)$, zaś $Y = X^k$, $k > 0$. Proszę policzyć kowariancję oraz współczynnik korelacji tych zmiennych.

6. W urnie znajduje się $N=20$ kul, w tym $M=5$ kul białych. Niech zmienne losowe X i Y przyjmują wartości równe liczbie wyjętych kul białych, odpowiednio w pierwszym oraz drugim, bezzwrotnym losowaniu kuli z urny (tzn. przyjmują one wartości 1 w przypadku wylosowania kuli białej, natomiast 0 w przypadku wylosowania kuli, która nie jest biała). Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej (X,Y) oraz obliczyć współczynnik korelacji. Porównać wyniki, przyjmując $N=100$, $M=25$, oraz $N=1000$, $M=250$. Zinterpretować uzyskane wyniki.
7. Zadanie komputerowe dla chętnych, aspirujących do podwyższenia oceny z całości kursu.

Niech niezależne zmienne $X_1 \dots X_n$ mają rozkłady normalne $N(0,1)$. Wtedy $Y = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody. Napisać bazujący na tym generator liczb losowych Y (np. dla $n=3$). Otrzymany wynik porównać na wykresie z analityczną postacią rozkładu $\chi_{n=3}^2$. Zmienne o rozkładzie normalnym proszę otrzymać korzystając z generatora o rozkładzie jednorodnym i transformacji Box-Mullera.