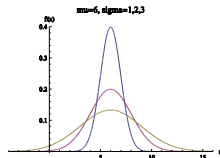


Poprzedni wykład

- Rozkład jednorodny
- Rozkład wykładniczy
- Rozkład Weibulla
- Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

- problem z dystrybucją
- ważność wyniku z CTG
- standaryzacja
- specjalne metody generowania



1

Rozkład Pareto

$$f_X(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} \quad x > b, a > 0, b > 0$$

- Parametr b opisuje położenie, a-kształt
- Wartość oczekiwana i wariancja

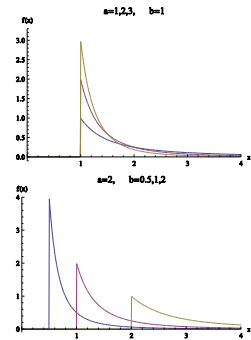
$$E(X) = \frac{ab}{a-1} \quad \text{dla } a > 1$$

$$\text{var}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)} \quad \text{dla } a > 2$$

- Zastosowanie: rozkład dochodów, rozkład długości plików, wielkość cząstek piasku, czasopisma w bibliotece (rozkład Bradforda)

- Zasada Pareto: np. 20% populacji ma 80% bogactw (wartości zależą od parametrów)

- Pojawia się przy grupowaniu w rangi



2

Rozkład Gamma

$$f_X(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \quad x \geq 0, \lambda > 0, \alpha > 0 \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

- Parametr λ opisuje położenie i wielkość, parametr α opisuje kształt.
- Wartość oczekiwana i wariancja

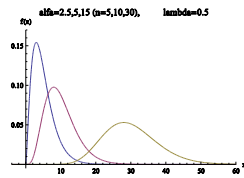
$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

- Z tego rozkładu wyprowadza się inne rozkłady, np:

$$\text{dla } \alpha=1 \quad f_X(x) = \frac{(\lambda x)^{1-1} \lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(1)} = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\text{dla } \alpha=n/2, \lambda=1/2 \quad f_X(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}$$

Jest to rozkład $\chi_n^2(x)$ „Chi-kwadrat o n stopniach swobody”



3

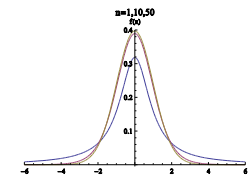
Rozkład t-Studenta

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

- Parametr $n=1, 2, \dots$ opisuje kształt.
- Wartość oczekiwana (dla $n>1$)

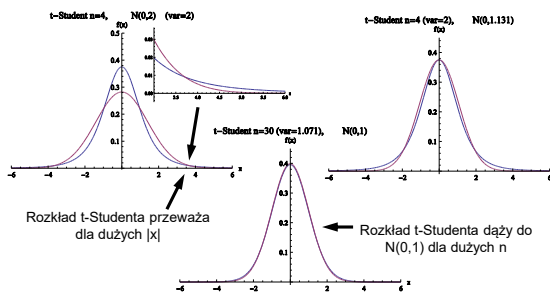
$$E(X) = 0 \quad \text{var}(X) = \frac{n}{n-2}$$

- Dla $n=1$ jest to rozkład Cauchy
- Dla $n>30$ dobrym przybliżeniem jest rozkład normalny $N(0, n/(n-2))$
- Generowanie: Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład $N(0, 1)$, a zmienna losowa Y ma rozkład $\chi_n^2(y)$ to $Z = X/\sqrt{Y/n}$ ma rozkład t-Studenta o n stopniach swobody.



4

Porównanie rozkładu t-Studenta i rozkładu normalnego



5

Wielowymiarowe zmienne losowe (wektory losowe)

6

Wielowymiarowe zmienne losowe (wektory losowe)

- Syt. Eksperyment losowy E, związana z nim przestrzeń próbek S
- n-wymiarowy wektor losowy** $\vec{X}$ to funkcja, która każdemu elementowi z należącego do zbioru S przyporządkowuje wektor n liczb rzeczywistych ($X_1(s), X_2(s), \dots, X_n(s)$) (n zmiennych losowych),
- Np. Losujemy punkt na płaszczyźnie $X_1(s)=x, X_2(s)=y$
- Nie ma związku pomiędzy wymiarem elementu w S (czyli liczbą zmiennych potrzebnych do opisanie wyniku eksperymentu) a wymiarem wektora losowego $\vec{X}$.
- np. $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$:

$$X_1(s) = x_a, X_2(s) = y_a, X_3(s) = x_a + y_a, X_4(s) = \text{sign}(x_a)$$
- W dalszym ciągu ograniczymy się do n=2

7

Łączny rozkład prawdopodobieństwa

- Syt. $\vec{Z} = (X, Y)$ $S_{\vec{Z}} = \{(x_i, y_j)\}$ $i = 1, 2, \dots$ $j = 1, 2, \dots$
- Łącznym rozkładem prawdopodobieństwa** nazywamy (dwuargumentową) funkcję, która

$$\forall i, j: P_{X,Y}(x_i, y_j) = P[\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}] \equiv P[X = x_i, Y = y_j]$$
 - Własności:**

$$\forall i, j \quad P_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0$$

$$\sum_i \sum_j P_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$$

$$P(A) = \sum_{(x_i, y_j) \in A} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$
 - Łączna dystrybuanta**

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

8

Brzegowy rozkład prawdopodobieństwa

- Brzegowym rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej X** nazywamy (jednoargumentową) funkcję $P_X(x_i)$:

$$P_X(x_i) \equiv P(X = x_i) = \sum_j P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_j P_{X,Y}(x_i, y_j)$$
- Analogicznie: $P_Y(y_j) = \sum_i P_{X,Y}(x_i, y_j)$
- Przykład: dwukrotny rzut monetą.
 X – liczba orłów w pierwszym rzucie
 Y – liczba orłów w dwóch rzutach

x_i	0	1
$P_X(x_i)$	1/2	1/2

y_j	0	1	2
$P_Y(y_j)$	1/4	1/2	1/4

9

Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa

- Syt. $\vec{Z} = (X, Y)$, X, Y – ciągle zmienne losowe
- Łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa pary (X, Y)** nazywamy funkcję, która wiąże się z prawdopodobieństwem zdarzenia A poprzez:

$$P(A) = \iint_A f_{X,Y}(x, y) dx dy$$
 - Własności:**

$$\forall x, y \quad f_{X,Y}(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

$$P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy) = f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

10

Niezależność zmiennych losowych

- Łączna dystrybuanta**

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv$$
- Zmienne losowe X, Y tworzące wektor losowy są niezależne gdy**

$$\forall x, y \quad F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$
- co jest równoważne

$$\forall x, y \quad P_{X,Y}(x, y) = P_X(x) P_Y(y)$$

$$\forall x, y \quad f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

11

Kowariancja i korelacja zmiennych losowych

- Syt. $Z = g(X, Y)$

$$E(Z) = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) P_{X,Y}(x_i, y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \end{cases}$$
- Wnioski: 1. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- Dla zmiennych niezależnych
 2. $E(g_1(X) \cdot g_2(Y)) = E(g_1(X)) \cdot E(g_2(Y))$
 w szczególności dla $g_1(X) = X$ i $g_2(Y) = Y$ $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
- Dla zmiennych zależnych

$$E(XY) \neq E(X) \cdot E(Y)$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

12

Kowariancja i korelacja zmiennych losowych

- Wzór $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$ jest równoważny

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f_{X,Y}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

- Własności:
 - $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X) \geq 0$
 - Kowariancja nie musi być nieujemna.
 - Dla zmiennych niezależnych $\text{cov}(X, Y) = 0$
 - $E(XY)$ nazywamy **korelacją zmiennych X i Y**

13

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

- Współczynnik korelacji** zmiennych losowych X, Y (unormowana kowariancja) to

$$\rho_{X,Y} \equiv \rho(X, Y) \equiv \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$$

- Własności:
 - Współczynnik korelacji jest bezwymiarowy.
 - $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
 - $\rho_{X,Y} = 1$ dla $Y = aX + b$ $a > 0$
 $\rho_{X,Y} = -1$ dla $Y = aX + b$ $a < 0$

14

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

- 2. $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

Dowód:

Lemat (nierówność Schwartza): $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

Dowód lematu:

$$E(X^2) \geq 0 \quad \text{bo} \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx$$

Przypadek 1: $E(X^2) > 0$

$$g(z) \equiv E[(Y - zX)^2] = E[Y^2 + z^2 X^2 - 2zXY] = E[Y^2] + z^2 E[X^2] - 2zE[XY]$$

g(z) jest parabolą, ramiona do góry, $g \geq 0$ gdyż jest E(nieujemna funkcja) $\rightarrow \Delta \leq 0$

$$\Delta = 4(E[XY])^2 - 4E[X^2]E[Y^2]$$

$$\Delta \leq 0 \rightarrow 4(E[XY])^2 - 4E[X^2]E[Y^2] \leq 0 \rightarrow (E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$$

Przypadek 2: $E(X^2) = 0$

$$\rightarrow X = 0 \rightarrow \begin{cases} (E[XY])^2 = (E[0 \cdot Y])^2 = (E[0])^2 = 0 \\ E[X^2]E[Y^2] = E[0^2]E[Y^2] = 0 \end{cases} \rightarrow (E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$$

□

15

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

Dowód twierdzenia:

Weźmy $X \rightarrow X - E(X)$, $Y \rightarrow Y - E(Y)$, wtedy z lematu

$$(E[(X - E(X))(Y - E(Y))])^2 \leq E[(X - E(X))^2]E[(Y - E(Y))^2]$$

$$(\text{cov}(X, Y))^2 \leq \text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)$$

$$-\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)} \leq \text{cov}(X, Y) \leq \sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}$$

$$-1 \leq \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}} \leq 1 \rightarrow -1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1 \quad \square$$

- 3. Dla X, Y niezależnych $\rho_{X,Y} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Dowód: } \text{cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = \\ &= E[(X - E(X)) \cdot E[(Y - E(Y))]] = 0 \cdot 0 = 0 \\ &\rightarrow \rho_{X,Y} = 0 \end{aligned}$$

16

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

- 4. **Współczynnik korelacji jest miarą zależności liniowej**

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} &= 1 \quad \text{dla} \quad Y = aX + b \quad a > 0 \\ \rho_{X,Y} &= -1 \quad \text{dla} \quad Y = aX + b \quad a < 0 \end{aligned}$$

Dowód:

$$Y = aX + b$$

$$\rightarrow E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[(X - E(X))(aX + b - aE(X) - b)] =$$

$$= E[(X - E(X))(aX - aE(X))] = aE[(X - E(X))(X - E(X))] =$$

$$= aE[(X - E(X))^2] = a \text{var}(X)$$

$$\rightarrow \rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} = \frac{a \text{var}(X)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot a^2 \text{var}(X)}} = \frac{a \text{var}(X)}{\sqrt{a^2 (\text{var}(X))^2}} = \frac{a \text{var}(X)}{|a| \text{var}(X)} = \frac{a}{|a|}$$

17