Niepewności pomiarowe - dygresja

- Niepewności systematyczne (dokładność przyrządu, wydajność przyrządu, przybliżenia teoretyczne, …)
- Niepewności statystyczne (pochodzące od losowej natury zjawiska i/lub czynników poza naszą kontrolą). Uwidacznia się przy powtarzaniu eksperymentu.
- Zał: zmierzona wartość X, oszacowana niepewność systematyczna Δ, oszacowane odchylenie standardowe $\sigma(X)$
- Zapis wyniku: $X(\sigma(X))\pm\Delta$ lub (mniej precyzyjne) $X\pm\sigma(X)\pm\Delta$

  Np. X=2.34 Δ=0.01 σ(X) =0.12: 2.34(12) ±0.01 lub 2.34 ±0.12 ±0.01

  W tym przykładzie $\Delta \ll \sigma(X)$ i wtedy Δ pomijamy: 2.34 ±0.12

Ale czasami chcemy podać jedną niepewność (=połączyć Δ oraz σ(X))

Nie ma dobrej teorii, która pokazuje jak to zrobić.

Istnieje teoria jak łączyć niepewności statystyczne z różnych źródeł

$$\sigma=\sqrt{(\sigma_1)^2+(\sigma_2)^2+\dots}$$

Niektórzy zakładają, że niepewność systematyczna ma rozkład jednorodny co pozwala w miejsce Δ używać $\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta$ co prowadzi do wzoru $\sigma=\sqrt{(\sigma_{stat})^2+\frac{1}{3}\Delta^2}$

1

Inne parametry - momenty

- **Momentem rzędu k względem początku układu współrzędnych** dla zmiennej losowej X nazywamy

$$\boxed{\tilde{\mu}_k \equiv E(X^k) \qquad k=0,1,2,\dots}$$

czyli $\tilde{\mu}_0=1 \qquad \tilde{\mu}_1=E(X)$

- **Momentem centralnym rzędu k** dla zmiennej losowej X nazywamy

$$\boxed{\mu_k \equiv E((X-E(X))^k) \qquad k=0,1,2,\dots}$$

- czyli $\mu_0=1 \qquad \mu_1=0 \qquad \mu_2=var(X)$

2

Inne parametry – skośność i kurtoza

- **Skośność** - miara asymetrii

$$\boxed{\beta_1 \equiv \frac{\mu_3}{(\sigma(X))^3}}$$

- **Kurtoza** - miara skupienia (spłaszczenia)

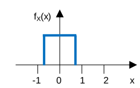
$$\boxed{\beta_2 \equiv \frac{\mu_4}{(\sigma(X))^4}-3}$$

Przykład: rozkład prostokątny i rozkłady trójkątne

3

Przykład: rozkłady trójkątne

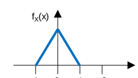
- Rozkład jednorodny na $x\in\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



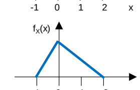
spr. (normalizacja) $N=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & dla\ x\in\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ 0 & dla\ x\notin\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{cases}$$

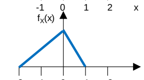
- Rozkład trójkątny I $f_X(x)=\begin{cases}x+1 & dla\ x\in(-1,0]\\ 1-x & dla\ x\in(0,1)\\ 0 & dla\ x\notin(-1,1)\end{cases}$



- Rozkład trójkątny II $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} & dla\ x\in(-1,0]\\ \frac{-1}{3}x+\frac{2}{3} & dla\ x\in(0,2)\\ 0 & dla\ x\notin(-1,2)\end{cases}$



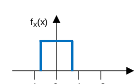
- Rozkład trójkątny III $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} & dla\ x\in(-2,0]\\ \frac{-2}{3}x+\frac{2}{3} & dla\ x\in(0,1)\\ 0 & dla\ x\notin(-2,1)\end{cases}$

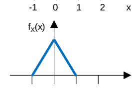


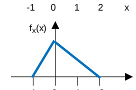
4

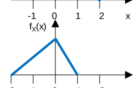
Przykład: rozkłady trójkątne

	Prostokątny	Trójkątny I	Trójkątny II	Trójkątny III
E(X)	0	0	1/3	-1/3
E(X²)	1/6	1/6	1/2	1/2
var(X)	1/6=0.16(6)	0.16(6)	7/18=0.38(8)	7/18
σ(X)	0.41	0.41	0.62	0.62
μ_3	0	0	2/27=0.07	-2/27
μ_4	0.05	0.06(6)	49/135=0.36	49/135
β_1	0	0	0.305	-0.305
β_2	-1.2	-0.6	-0.6	-0.6









5

Transformacje zmiennych losowych

Syt. X – zmienna losowa

g(X) – funkcja o wartościach rzeczywistych

Y=g(X) też jest zmienną losową

Pytanie: jak wygląda rozkład prawdopodobieństwa (funkcja gęstości prawdopodobieństwa) zmiennej losowej Y

- Zmienna X jest dyskretna

  Wtedy również Y jest dyskretne. Niech x_i dla *i=1,….,j* są takie, że $g(x_i)=y_k$. Wtedy

$$P_Y(y_k)=\sum_{i=1}^{j}P_X(x_i)$$

Przykład:

S_X={-2,0,2} P(X=-2)=1/4 P(X=0)=1/4 P(X=2)=1/2

Y=X²

S_Y={0,4} P(Y=0)=P(X=0)=1/4

P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=1/4+1/2=3/4

6

Transformacje zmiennych losowych

- Zmienna X jest ciągła, g(x) jest ciągłe
  Wtedy również Y jest ciągłe.
- I sposób (przez dystrybuantę)
  Szukamy $F_Y(y)$ a z niej liczymy $f_Y(y)$
- II sposób $\boxed{f_Y(y) = f_X(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|}$

  Ogólny przypadek – sumujemy po przedziałach monotoniczności g(X)

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_k f_{X,(k)}(x)\cdot\left|\frac{dx_{(k)}}{dy}\right|}$$

Przykłady: $Y=X^2$, $Y=X^4$

Przykład $Y=X^2$

Zał: X ma rozkład jednorodny na przedziale $x \in (0,2)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & dla\ x \in (0,2) \\ 0 & dla\ x \notin (0,2) \end{cases} \quad \to \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x \in (-\infty, 0) \\ \int_0^x \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} t\Big|_0^x = \frac{1}{2} x & dla\ x \in [0,2) \\ 1 & dla\ x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

$Y=X^2 \qquad y \in (0,4)$

- I sposób (przez dystrybuantę)

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) = P\left(0 \le X \le \sqrt{y}\right) =$$

$$= F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X(0) = \frac{1}{2}\sqrt{y} - 0 = \frac{1}{2}\sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\sqrt{y}\right) = \frac{1}{4\sqrt{y}} \qquad y \in (0,4)$$

- II sposób (ze wzoru $f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$)

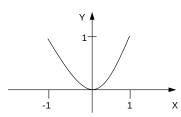
$$Y = X^2 \quad \to \quad X = \sqrt{Y} \quad \to \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{Y}}$$

$$\to \quad f_Y(y) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2\sqrt{Y}}\right| = \frac{1}{4\sqrt{Y}}$$

Spr: $N = \int_0^4 \frac{1}{4\sqrt{y}} dy = \frac{1}{4}\int_0^4 y^{-1/2} dy = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{y}\Big|_0^4 = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{4} = 1$

Przykład $Y=X^4$

Zał: X ma rozkład $f_X(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} & dla\ x \in [-1,1] \\ 0 & dla\ x \notin [-1,1] \end{cases}$



$Y=X^4 \qquad y \in [0,1]$

- Tylko II sposób ($f_Y(y) = \sum_k f_{X,(k)}(x)\left|\frac{dx_{(k)}}{dy}\right|$)

a) $x \in [-1, 0)$

$$Y = X^4 \quad \to \quad X = -Y^{1/4} \quad y \in (0,1]$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{4} y^{-3/4}$$

$$f_{Y,(I)}(y) = f_X(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left|\frac{-1}{4}y^{-3/4}\right| = \left(\frac{-1}{2}\left(-y^{1/4}\right) + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}y^{-3/4} = \frac{1}{8}\left(\sqrt[4]{y} + 1\right)y^{-3/4}$$

b) $x \in (0,1]$

$$Y = X^4 \quad \to \quad X = +Y^{1/4} \quad y \in (0,1)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4} y^{-3/4}$$

$$f_{Y,(II)}(y) = f_X(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left|\frac{1}{4}y^{-3/4}\right| = \left(\frac{-1}{2}\left(y^{1/4}\right) + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}y^{-3/4} = \frac{1}{8}\left(-\sqrt[4]{y} + 1\right)y^{-3/4}$$

c) $x = 0$

Łącznie $f_Y(y) = f_{Y,(I)}(y) + f_{Y,(II)}(y) = \frac{1}{8}\left(\sqrt[4]{y}+1\right)y^{-3/4} + \frac{1}{8}\left(-\sqrt[4]{y}+1\right)y^{-3/4} = \frac{1}{8}\cdot 2\cdot y^{-3/4} = \frac{1}{4}y^{-3/4}$

Dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa

- **Rozkład zero-jedynkowy (rozkład Bernoulliego)** o parametrze p

  Zmienna losowa to ilość sukcesów w jednokrotnym powtórzeniu eksperymentu w którym możliwe są tylko dwa wyniki
  $S_X=\{0,1\}$
  Rozkład prawdopodobieństwa $P(x) = \begin{cases} 1-p & dla\ x=0 \\ p & dla\ x=1 \end{cases}$

  zatem łącznie $P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$ dla x=0,1
  Dystrybuanta

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x<0 \\ 1-p & dla\ 0 \le x < 1 \\ 1 & dla\ x \ge 1 \end{cases}$$

Dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa

- **Rozkład dwupunktowy** o parametrze p
  Zmienna losowa przyjmuje dwie dowolne wartości, jedną z prawdopodobieństwem p, drugą z prawdopodobieństwem 1-p.

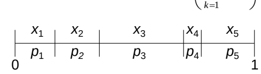
- **Rozkład wielopunktowy** o parametrach p_i, i=1,2,...,n
  przy czym $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$.
  Zmienna losowa przyjmuje skończoną (n) ilość dyskretnych wartości.

- **Rozkład wielopunktowy** o parametrach p_i, i=1,2,...
  przy czym $p_1+p_2+\ldots=1$.
  Zmienna losowa przyjmuje nieskończoną ilość dyskretnych wartości

Dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa – realizacja numeryczna

- 1. Odwracanie dystrybuanty (przykład w przyszłości)
- 2. Syt. Dysponujemy generatorem liczb pseudolosowych z przedziału (0,1)
- Dla rozkładu ze skończoną (=n) liczbą wartości zmiennej losowej X. Przedział (0,1) dzielimy na n przedziałów o długości p_i :

$$(0, p_1] \cup (p_1, p_1+p_2] \cup \ldots \cup \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k, 1\right)$$



Losujemy liczbę Y $\in$(0,1) i znajdujemy dla niej przedział: $Y \in \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k, p_j\right]$

Jako wylosowaną wartość zmiennej losowej X przyjmujemy x_j.

Dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa – realizacja numeryczna

- Syt. Dysponujemy generatorem liczb pseudolosowych z przedziału (0,1)
- Dla rozkładu z nieskończoną liczbą wartości zmiennej losowej X.
  Wybieramy ε (bardzo małe), p_i (jak największe) i n_{max}:

$$\sum_{k=1}^{n_{max}} p_k = 1-\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0, \varepsilon \approx 0)$$

Przedział (0,1-ε) dzielimy na n_{max} przedziałów o długości p_i :

$$(0, p_1] \cup (p_1, p_1 + p_2] \cup \ldots \cup \left(\sum_{k=1}^{n_{max}-1} p_k, 1-\varepsilon \right)$$

Losujemy liczbę Y $\in$(0,1).
Jeżeli Y $\in$(0,1-ε) to znajdujemy dla niej przedział: $Y \in \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k, p_j \right]$

i jako wylosowaną wartość zmiennej losowej X przyjmujemy x_j.
Jeżeli Y $\in$[1-ε,1) to dodajemy przedziały powyżej n_{max} tak długo, aż znajdziemy przedział do którego należy Y.