

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Każdemu zdarzeniu A w przestrzeni próbek Ω przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą $P(A)$ zwaną prawdopodobieństwem, tak by miała ona następujące własności:

I: $\forall A \subset \Omega \quad P(A) \geq 0$

II: $P(\Omega) = 1$

III: Jeżeli $A_1, A_2, \dots$ jest ciągiem rozłącznych zdarzeń to

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

1

Podsumowanie: przestrzeń probabilistyczna

Formalnie eksperymenty losowe opisujemy zatem za pomocą trzech elementów:

I: Przestrzeń próbek Ω (zbiór zdarzeń elementarnych)

II: Przestrzeń zdarzeń losowych: zbiór podzbiorów przestrzeni Ω próbek z dołączonym zbiorem pustym (σ -ciało)

III: funkcja prawdopodobieństwa $P(A)$
np. obliczane poprzez (klasyczna definicja prawdopodobieństwa) ze wzoru (ćwiczenia)

2

Wnioski z aksjomatów

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$\begin{aligned} \text{Dow: } \begin{cases} \bar{A} \cup A = \Omega \\ \bar{A} \cap A = \emptyset \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} P(\bar{A} \cup A) = 1 \\ P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) \end{cases} \\ &\rightarrow P(\bar{A}) + P(A) = 1 \rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

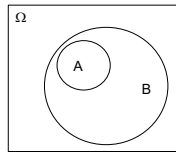
2. $P(A) \leq 1$

3. $P(\emptyset) = 0$

4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dow:

$$\begin{aligned} B &= A \cup (\bar{A} \cap B) \rightarrow P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \\ &\rightarrow P(A) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) \leq P(B) \end{aligned}$$



3

Wnioski z aksjomatów

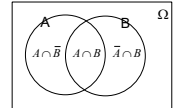
5. Dla dwóch zdarzeń rozłącznych: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. Dla dwóch dowolnych zdarzeń:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dow:

$$\begin{aligned} A &= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) & B &= (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) \\ P(A) &= P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) & P(B) &= P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) & P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$



$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

4

Wnioski z aksjomatów

7. Dla trzech dowolnych zdarzeń:

$$P(A \cup B \cup C) =$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Dow:

$$BC \equiv B \cup C$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup BC) = P(A) + P(BC) - P(A \cap BC) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C)) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

8. Dla większej liczby zdarzeń

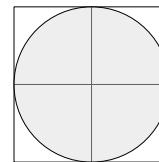
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

(dowód indukcyjnie)

5

Prawdopodobieństwo geometryczne

Prawdopodobieństwo geometryczne – miarą ilość zdarzeń elementarnych odpowiadających zdarzeniu A i przestrzeni zdarzeń Ω są pola (objętości) odpowiednich figur (brył) geometrycznych (np. wyznaczenie liczby π , igła Buffona).



$$\begin{aligned} P_{\text{kwadrat}} &= 4R^2 \\ P_{\text{kolo}} &= \pi R^2 \\ P(\text{trafienia}) &= \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4} \\ P(\text{trafienia}) &= \frac{N_{\text{trafien}}}{N_{\text{prob}}} \\ &\rightarrow \pi = \frac{4N_{\text{trafien}}}{N_{\text{prob}}} \end{aligned}$$

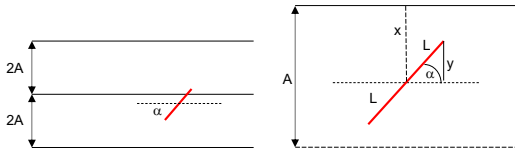
6

Igła, a w zasadzie patyczek, Buffona

Rzucamy patyczkiem o długości $2L$ na podłogę z desek (nieskończenie długich). Odległość pomiędzy deskami wynosi $2A$, zakładamy $L < A$. Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia: losowo rzucony patyczek przecnie krawędź desek?

Do opisu położenia patyczka używamy dwóch zmiennych:

X – odległość środka patyczka do najbliższej krawędzi powyżej środka patyczka.
 α – kąt (jak na rys.)

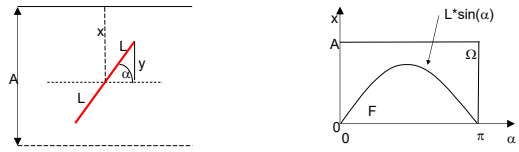


Igła, a w zasadzie patyczek, Buffona

Rozważmy sytuację $0 < x < A$, $0 < \alpha < \pi$

Cała przestrzeń Ω : prostokąt o wymiarach $A \cdot \pi$

Przecięcie krawędzi zajdzie dla $x < L \sin(\alpha)$ ($y = L \sin(\alpha)$)



$$F = \int_0^{\pi} L \cdot \sin(\alpha) d\alpha = -L \cdot \cos(\alpha) \Big|_0^{\pi} = -L \cdot (-1 - 1) = 2L$$

$$\bar{\Omega} = A \cdot \pi$$

$$P(\text{przecięcie krawędzi}) = \frac{F}{\bar{\Omega}} = \frac{2L}{A \cdot \pi}$$

Co stanie się jeżeli dopuścimy $-A < x < A$?

7

8

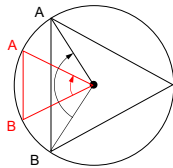
Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu $R=1$ skonstruowano losowo cięciwę AB.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Rozwiązanie I:

Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór kąta na którym oparta jest cięciwa



$$\Omega = [0, \pi] \rightarrow \bar{\Omega} = \pi$$

$$Z = \left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right] \rightarrow \bar{Z} = \frac{\pi}{3}$$

$$P(Z) = \frac{\bar{Z}}{\bar{\Omega}} = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}$$

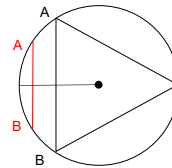
Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu $R=1$ skonstruowano losowo cięciwę AB.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Rozwiązanie II:

Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór odległości środka okręgu do cięciwy



$$\Omega = [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega} = 1$$

$$Z = \left[0, \frac{1}{2} \right] \rightarrow \bar{Z} = \frac{1}{2}$$

$$P(Z) = \frac{\bar{Z}}{\bar{\Omega}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

9

10

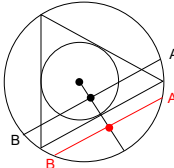
Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu $R=1$ skonstruowano losowo cięciwę AB.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Rozwiązanie III:

Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór punktu wewnątrz koła, który będzie środkiem cięciwy przechodzącej przez punkt i prostopadłej do promienia



$$\Omega = K(0,1) \rightarrow \bar{\Omega} = \pi \cdot 1^2$$

$$Z = K\left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \bar{Z} = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(Z) = \frac{\bar{Z}}{\bar{\Omega}} = \frac{\pi/4}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Sposób losowania jest ważny! Różne sposoby nie są równoważne!

Prawdopodobieństwo warunkowe

Sytuacja: A, B – to dwa zdarzenia w przestrzeni próbek Ω związanej z eksperymentem E , $P(B) > 0$. W wyniku przeprowadzenia eksperymentu E stwierdzamy, że zaszło zdarzenie B .

Prawdopodobieństwo warunkowe to liczba

$$P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$

Powyższa definicja jest zgodna z definicją aksjomatyczną prawdopodobieństwa.

Odpowiada ona prawdopodobieństwu zdarzenia A w przestrzeni próbek ograniczonej do zdarzenia B .

11

12

Zgodność z aksjomatami

- Aksjomat I ($P(A) \geq 0$)
 $P(A|B) \geq 0$ gdyż $P(A \cap B) \geq 0 \wedge P(B) > 0$
- Aksjomat II ($P(\Omega)=1$), teraz B jest przestrzenią próbkowania
 $P(B|B)=1$ gdyż $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
- Aksjomat III (A_k rozłączne: $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$)

$$\begin{aligned} P(\bigcup_k A_k | B) &= \sum_k P(A_k | B) \quad \text{gdyż} \quad P(\bigcup_k A_k | B) = \\ &= \frac{P(\bigcup_k A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_k (A_k \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_k P(A_k \cap B)}{P(B)} = \\ &= \sum_k \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_k P(A_k | B) \end{aligned}$$

13

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$

- Każde prawdopodobieństwo jest warunkowe
 $P(A) = P(A|\Omega)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A|B) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- $B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$
- $P(A|B) > P(A) \Rightarrow P(B|A) > P(B)$
- Nie ma zależności pomiędzy wartościami $P(A)$ i $P(A|B)$.
- Można budować bardziej skomplikowane relacje.

14

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

$$\begin{aligned} P(A|B) > P(A) &\Rightarrow P(B|A) > P(B) \\ \text{Dow:} \\ P(A|B) > P(A) &\Rightarrow \frac{P(A|B)}{P(A)} > 1 \\ P(A \cap B) &= P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) \\ P(A|B) &= P(A) \cdot \frac{P(B|A)}{P(B)} \\ \underbrace{\frac{P(A|B)}{P(A)}}_{>1} &= \frac{P(B|A)}{P(B)} \Rightarrow \frac{P(B|A)}{P(B)} > 1 \Rightarrow P(B|A) > P(B) \end{aligned}$$

15

Partycja przestrzeni próbek

Zbiór zdarzeń B_k $k=1,2,\dots,n$ tworzy partycję przestrzeni próbek Ω jeżeli:

$$\text{I: } \forall i \neq j: B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$\text{II: } \bigcup_{k=1}^n B_k = \Omega$$

np. zdarzenie A i przeciwne do niego zdarzenie $\Omega \setminus A$ tworzą partycję przestrzeni Ω .

Zał: zbiory $B_1, \dots, B_n$ tworzą partycję przestrzeni Ω , $\forall i: P(B_i) > 0$ a zdarzenie $A \subset \Omega$. Wtedy zachodzi **reguła całkowitego prawdopodobieństwa**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

16

Wzór Bayesa

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad \text{dla } P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \quad \text{dla } P(A) > 0$$

Łącznie otrzymujemy **wzór Bayesa**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Stosując powyższe dla $B=B_k$ tworzącego partycję przestrzeni Ω dostajemy

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

17

Wzór Bayesa

Prawdopodobieństwo *a priori* – prawdopodobieństwo zdarzenia przed wprowadzeniem dodatkowej informacji
 Prawdopodobieństwo *a posteriori* – prawdopodobieństwo zdarzenia po wprowadzeniu dodatkowej informacji

Przykłady:

- Losowanie kul z urny
- Test medyczny (ćwiczenia)

18

Przykład: Losowanie kul

W urnie jest 6 kul, białe i czarne (co najmniej jedna biała i co najmniej jedna czarna). Ile jest kul białych, a ile czarnych ?

Niech M_i – układ z i kulami czarnymi w urnie

A priori $P(M_i) = 1/5 = 0.2$

Losujemy dwie kule i obie okazują się białe (zdarzenie BB).

Jak teraz oszacujemy $P(M_i)$?

$$\begin{aligned} \text{ale } P(BB | M_1) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{6} = 0.667 & P(M_i | BB) &= \frac{P(BB | M_i) \cdot P(M_i)}{P(BB)} \\ P(BB | M_2) &= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = 0.4 \\ P(BB | M_3) &= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = 0.2 \\ P(BB | M_4) &= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = 0.067 & \rightarrow P(BB) &= \sum_i P(BB | M_i) \cdot P(M_i) = \\ P(BB | M_5) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = 0 & &= 0.667 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 + \dots + 0 \cdot 0.2 = 0.2668 \end{aligned}$$

Przykład: Losowanie kul cd

Zatem prawdopodobieństwa a posteriori

$$P(M_i | BB) = \frac{P(BB | M_i) \cdot P(M_i)}{P(BB)}$$

$$P(M_1 | BB) = \frac{0.667 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.50$$

$$P(M_2 | BB) = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.30$$

$$P(M_3 | BB) = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.15$$

$$P(M_4 | BB) = \frac{0.067 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.05$$

$$P(M_5 | BB) = \frac{0 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.00$$

- Prawdopodobieństwa a posteriori są różne od tych a priori
- Prawdopodobieństwa są różne dla różnych układów początkowych M_i
- Niektóre układy zostały wykluczone

19

20