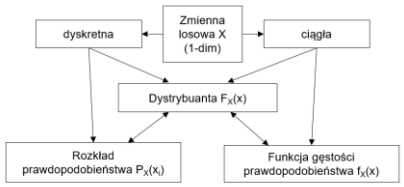
Poprzednim razem



- Metoda odwracania dystrybuanty

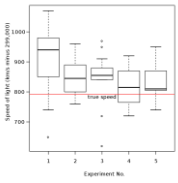
1

Globalny opis dystrybuanty i funkcji gęstości prawdopodobieństwa

- **Kwantylem rzędu p** (dla zmiennej losowej X) nazywamy liczbę x_p: $F_X(x_p)=p \quad (0 \le p \le 1)$

W szczególności:
- **Mediana** to kwantyl rzędu ½
- **Kwartyle** to kwantyle rzędu ¼ (pierwszy kwartyl), rzędu ½ (drugi kwartyl), rzędu ¾ (trzeci kwartyl)
- **Percentyle** to kwantyle rzędu 0.01, 0.02, …, 0.99

- **Moda** – wartość najbardziej prawdopodobna czyli x: max{ $f_X(x)$ }



Źródło: Wikipedia

2

Wartość oczekiwana

- **Wartością oczekiwaną** zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$E(X)=\sum_k P_X(x_k)\,x_k \quad \text{dla zmiennej dyskretnej}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,x\,dx \quad \text{dla zmiennej ciągłej}$$

- Uwaga 1:
  E(X) jest średnią ważoną możliwych wartości zmiennej X z wagą daną przez $P_X(x)$ lub $f_X(x)$.
- Uwaga 2:
  Dla zmiennej typu mieszanego łączymy obie definicje.
- Uwaga 3:
  Spotyka się też warunkową wartość oczekiwaną, wtedy $P_X(x) \to P_X(x|A)$, $f_X(x) \to f_X(x|A)$.

3

Wartość oczekiwana - własności

- Operator E( ) jest liniowy: $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k E(g_k(x))$

  a_k – stałe,
  $g_k(x)$ – funkcje o wartościach rzeczywistych

  Stąd (a,b – stałe):
  E(a)=a
  E(aX+b)=aE(X)+b
- Niech *Y* to nowa zmienna losowa i niech *Y=g(x)* wtedy

$$E(Y)=\sum_k P_X(x_k)\,g(x_k) \quad \text{dla zmiennej dyskretnej}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,g(x)\,dx \quad \text{dla zmiennej ciągłej}$$

4

Przykład: wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Niech zmienna losowa X ma rozkład jednorodny na (0,1):

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & dla\ x\in(0,1)\\ 0 & dla\ x\notin(0,1)\end{cases}$$

Niech $Y=X^2$.

Znaleźć wartości oczekiwane zmiennych X i Y.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)x\,dx=\int_0^1 x\,dx=\tfrac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\tfrac{1}{2}$$

$$E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)x^2\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\tfrac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\tfrac{1}{3}$$

czyli aby wyliczyć E(Y) nie musimy znać $f_Y(y)$.
gdybyśmy jednak ją znali to można liczyć $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)y\,dy$

5

Wariancja zmiennej losowej

- **Wariancją zmiennej losowej** nazywamy liczbę:

$$var(X)\equiv\sigma_X^2\equiv\sigma^2(X)=E\left((X-E(X))^2\right)$$

- Wariancja jest miarą rozrzutu zmiennej losowej wokół wartości średniej i jest nieujemna
- var(a)=0 dla a=const
- E(X-E(X)) nie jest przydatną wielkością, gdyż

$$E\big(X-E(X)\big)=E(X)-E(E(X))=E(X)-E(X)=0$$

- **Odchylenie standardowe zmiennej losowej**

$$\sigma_X\equiv\sigma(X)=\sqrt{var(X)}$$

6

Wariancja zmiennej losowej - własności

- $\boxed{var(aX+b) = a^2\, var(X)}$

Dowód:

$$var(aX+b) = E\left((aX+b-E(aX+b))^2\right) =$$
$$= E\left((aX+b-aE(X)-b)^2\right) = E\left((aX-aE(X))^2\right) =$$
$$= E\left(a^2(X-E(X))^2\right) = a^2 E\left((X-E(X))^2\right) = a^2 var(X)$$

- $\boxed{var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$

Dowód:

$$var(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\right) =$$
$$= E(X^2) - 2E(XE(X)) + E\left((E(X))^2\right) =$$
$$= E(X^2) - 2\left(E(X)\right)^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

7

Przykłady

- E(X) i var(X) dla rozkładu geometrycznego

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p \qquad k = 1, 2, \ldots$$

→ $E(X) = \frac{1}{p}$

→ $\sigma(X) = \frac{1}{p}\sqrt{1-p}$

- E(X) i var(X) dla rozkładu jednorodnego na przedziale [a,b]

$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ dla $x \in [a, b]$

→ $E(X) = \frac{a+b}{2}$

→ $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2}$

8