

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Kurs dla kierunku
Informatyki stosowanej
Uniwersytet Jagielloński
Kraków, 2025/2026

Dr hab. Roman Skibiński, prof. UJ

RPIS 2025/2026

1

UWAGA:

Slajdy zawierają (prawie) całość materiału przedstawianego na wykładach;

Powinny być uzupełnione wiadomościami z ćwiczeń

<http://koza.if.uj.edu.pl/~rpis/>

<http://koza.if.uj.edu.pl/~aplety/>

Konsultacje: czwartki 9-10 pokój H-0-03
(jeżeli możliwe proszę się zapowiedzieć mailowo)
lub w innym terminie w B-2-34 po umówieniu email

2

Warunki zaliczenia (1)

- Ćwiczenia: ocena będzie średnią ocen cząstkowych (w skali 2.0-5.0) - z dwóch kolokwium z zadań i aktywności. Niezaliczone kolokwium będzie można poprawiać na kolokwium poprawkowym, poprawa dotyczy tylko niezaliczonej części materiału. W przypadku poprawiania jednego kolokwium średnia będzie liczona jako średnia z czterech ocen (2 kolokwia + aktywność + kolokwium poprawkowe) przeliczona jak wyżej. Analogicznie w przypadku poprawiania obu kolokwiumów średnia będzie liczona z pięciu ocen.
- Średnia ta zostanie przeliczona na ocenę z ćwiczeń, wpisywaną do indeksu, w następujący sposób:
[2.66-3.20] – ocena dostateczna,
[3.20-3.70] – ocena dostateczna plus,
[3.70-4.20] – ocena dobra,
[4.20-4.50] – ocena dobra plus,
[4.51-5.0] – ocena bardzo dobra.
- Zasady dla oceny z aktywności na ćwiczeniach ustalone są w grupach ćwiczeniowych.
- Warunkiem zaliczenia ćwiczeń jest zaliczenie (najpóźniej w wyniku poprawy) obu kolokwiumów co najmniej na ocenę dostateczną.

3

Warunki zaliczenia (2)

- Wykład: cztery kartkówki na ćwiczeniach, oceniane w skali 0-5 pkt. Suma punktów prowadzi do oceny:
[12-13.5] – ocena dostateczna,
[13.5-15.0] – ocena dostateczna plus,
[15.0-16.5] – ocena dobra,
[16.5-18.0] – ocena dobra plus,
[18.0-20.0] – ocena bardzo dobra.
 - Przed kartkówkami (niezapowiedzianymi) dostępne będą zagadnienia do przygotowania
 - W trakcie semestru można poprawić jedną, najgorzej napisaną kartkówkę + te z usprawiedliwionymi nieobecnościami
 - Osoby, które nie uzyskają 12 punktów piszą kolokwium poprawkowe z całości wykładu
- Aby uzyskać zaliczenie z wykładu ocena z ćwiczeń musi być nie mniejsza niż 3.0.
- Ocena końcowa (wpisywana do indeksu, z wykładu):
(2/3*ocena z ćwiczeń + 1/3*ocena z wykładu)*0.9
Powyższy algorytm prowadzi do oceny wpisywanej do indeksu:
do 2.70 – ocena niedostateczna,
[2.70-3.15] – ocena dostateczna,
[3.15-3.60] – ocena dostateczna plus,
[3.60-4.05] – ocena dobra,
[4.05-4.5] – ocena dobra plus,
Osoby, które rozwiążą zadania programistyczne (co najmniej wszystkie -1) będą miały ocenę podwyższoną o pół stopnia np. z dobrej plus na bardzo dobrą. Dotyczy to podwyższania od oceny 3.0. Zatem warunkiem otrzymania oceny bardzo dobrej w indeksie jest napisanie niezbędnej liczby zadanych programów.

4

Literatura

- W.Krysicki, J.Bartos i inni, „Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach” tomy 1 i 2, PWN 2005

Literatura dodatkowa:

- J.Jakubowski, R.Sztencel „Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego”, SCRIPT, W-wa 2006.
- S.Brandt „Analiza danych”, PWN (od 1999)
- R.Nowak „Statystyka dla fizyków” PWN 2002.
- V.Rohatgi, „Statistical inference”, J.Wiley&Sons, Inc, 1984.

5

Definiujemy sztukę przewidywania, inaczej sztukę stochastyki, jako sztukę oceniania z największą możliwą dokładnością prawdopodobieństwa zdarzeń, tak żebyśmy w naszych osądach i działaniach zawsze mogli opierać się na tym, co okazało się najlepsze, najodpowiedniejsze, najpewniejsze, najsensowniejsze; jest to jedyny cel mądrości filozofa i roztropności męża stanu.

J.Bernoulli „Ars Conjectandi”
(„Sztuka przewidywania”) 1713

Za I.Stewart „Oswajanie nieskończoności.
Historia matematyki”

6

Zakres wykładu

- **Rachunek prawdopodobieństwa** – jak liczyć prawdopodobieństwa zdarzeń i jak je globalnie opisywać.
- **Statystyka matematyczna** – jak wnioskować w sytuacjach, gdy mamy niepełną informację (wniosek o całej grupie na podstawie informacji zebranej na części grupy, np. sondaże przedwyborcze), jak oceniać wiarygodność takiego wnioskowania (hipotezy statystyczne)

7

Dlaczego ?

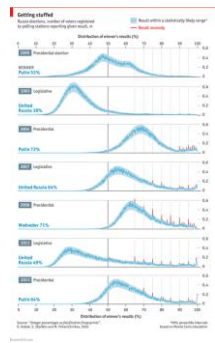
- Ma wpływ na nasze życie (gry hazardowe, ubezpieczenia, handel, kryminalistyka, medycyna, polityka, manipulacje)
- Zastosowania w informatyce:
 - symulacje komputerowe
 - metody obliczeniowe
 - modelowanie rzeczywistości (grafika)
 - probabilistyczna (statystyczna) analiza algorytmów
 - algorytmy probabilistyczne (w tym komputer kwantowy)
 - systemy kolejkowe
 - eksploracja danych (Big Data)
 - uczenie maszynowe
 - układy z szumem (np. rozpoznawanie mowy)

8

Rozgrzewka I

Statystyka jako test uczciwości wyborów

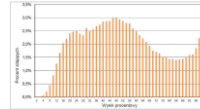
- Zał: kandydat wygrywa z 70% poparciem w skali kraju. Jaki będzie rozkład głosów w poszczególnych komisjach ?



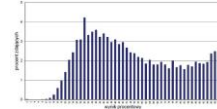
9

Rozgrzewka II - matury

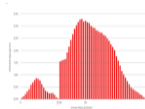
Matematyka 2020



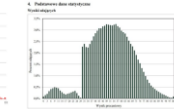
Język niemiecki 2020



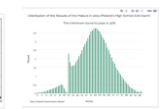
Język polski p 2021



2020



2013

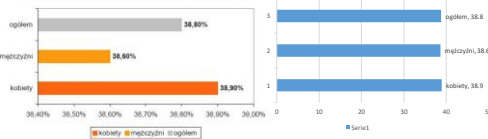


<https://tied.gazeta.pl/tied/1,151003,27046482,matura-z-polskiego-2021-jaz-ca-nami-jaj-wyrzki-co-roku-przezza.html>

10

Rozgrzewka III – dobór osi

Wykres. Udział w programach lojalnościowych
Czy kiedykolwiek brałaś/ Panie udział w programie lojalnościowym?



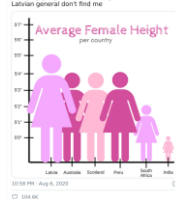
Źródło: ARC Rynek i Opinia, BTL Monitor 2007
Źródło: <http://www.agropolska.pl/2014/02/zyczenie-zakupow-kobiety-mmaj-kgakie-2,38,1.htm>

11

Rozgrzewka III – dobór osi

Statish Statist

As an Indian woman, I can confirm that too much of my time is spent hiding behind a rock praying the terrifying gang of international giant babies and their Latvian general don't find me



<https://betaandb.github.io/Wykrezy/mutant.html>



<https://www.boredpanda.com/average-women-height-data-chart-latvian-indian-women/>

12

Historia

- Starożytność, Średniowiecze – gry losowe
- XVI w G.Cardano (1501-1576), „Księga o grach losowych” – podstawy prawdopodobieństwa (gry w kości i w karty, dodatkowo rozdział o skutecznym oszukiwaniu)
- A.Gombaud (Chevalier de Méré, 1607-1684) – korespondencja pomiędzy B.Pascalem (1623-1662; 1654, 1655 – trójkąt Pascala) a P.de Fermat (1601-1665), problem podziału puli przy przerwaniu gry („problem of points”)

Rozwiązanie biorące pod uwagę tylko dotychczasowe wyniki jest błędne, należy uwzględnić możliwe zdarzenia do zaplanowanego końca gry.

13

Historia

- Ch.Huygens(1629-1695), J.Bernoulli (1654-1705; 1713 – „Sztuka przewidywania”, białe i czarne kamyki w urnie),
- problemy typu „rzut uczciwą monetą”. Ale co to znaczy „uczciwa moneta”?
- T.Bayes (1701-1761): analiza bayesowska
- P.Laplace(1749-1827), K.Gauss(1777-1855)
- teoria miary
- A.Quetelet (1796-1874); 1835 statystyka społeczeństwa
- F.Galton (1822-1911); 1865 dziedziczenie, regresja
- K.Pearson (1857-1936); używane do dziś pojęcia i metodologia, zastosowania w naukach przyrodniczych
- XX w: A.N.Kołmogorow (1903-1987): nowoczesna tzw. aksjomatyczna teoria prawdopodobieństwa
- Wykorzystanie komputerów – nowe możliwości i nowe zadania

14

Pojęcia wstępne

- **Eksperyment deterministyczny** – warunki wyznaczają wynik (np. tylko białe kule w urnie)
- **Eksperyment przypadkowy (zdarzenie losowe)** to taki eksperyment, którego wyniku nie potrafimy przewidzieć, mimo, że powtarzamy go w takich samych warunkach.
(np. białe i czarne kule w urnie)

Jedynie co możemy zrobić to zebrać możliwe wyniki i określić ich prawdopodobieństwo.

15

Definicja częstościowa

Powtarzamy eksperyment n razy

$N_k(n)$ – liczba wystąpienia wyniku k w n eksperymentach

$f_k(n)$ – względna częstość wyniku k $f_k(n) = \frac{N_k(n)}{n}$

spełnia z def. $0 \leq f_k(n) \leq 1$

$$\sum_k f_k(n) = 1$$

Częstościowa definicja prawdopodobieństwa:

$$P(k) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n)$$

-trudne w praktyce (nieskończona liczba eksperymentów, powtarzalność doświadczeń, definicja eksperymentu (prawdopodobieństwo urodzenia dziewczynki/chłopca),

-wynika z aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa,

-przykład: aplet „Falszywa kostka”

16

Pojęcia wstępne

- **Przestrzeń próbek eksperymentu przypadkowego** to zbiór Ω wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu (dyskretna lub ciągła lub mieszana, skończona lub nieskończona)
- **Zdarzenie elementarne** – każdy możliwy wynik eksperymentu przypadkowego.
Powtarzając eksperyment przypadkowy jako wynik otrzymujemy jedno i tylko jedno zdarzenie elementarne; zdarzenia elementarne wykluczają się wzajemnie
- **Zdarzenie** to podzbiór przestrzeni próbek.
- Szczególne zdarzenia:
 - **zdarzenie niemożliwe** – pusty podzbiór przestrzeni Ω
 - **zdarzenie pewne** – cała przestrzeń Ω

17

Działania na zbiorach (przypomnienie)

- Operacje na zbiorach

(= podzbiórach przestrzeni próbek = zdarzeniach)

Suma $A \cup B: x \in A \vee x \in B$

Iloczyn $A \cap B: x \in A \wedge x \in B$

Dopełnienie $\bar{A}: A + \bar{A} = \Omega$

Rozłączność $A \cap B = \emptyset$

Zawartość $A \subset B: x \in A \Rightarrow x \in B$

Równość $A = B: A \subset B \wedge B \subset A$

Własności działań na zdarzeniach:

Przemienność $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

Łączność $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

Dystrybutywność (rozłączność sumy i iloczynu)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Prawa de Morgana

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

18

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Każdemu zdarzeniu A w przestrzeni próbek Ω przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą $P(A)$ zwaną prawdopodobieństwem, tak by miała ona następujące własności:

I: $\forall A \subset \Omega \quad P(A) \geq 0$

II: $P(\Omega) = 1$

III: Jeżeli $A_1, A_2, \dots$ jest ciągiem rozłącznych zdarzeń to

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$$

19

Przypisywanie prawdopodobieństwa zdarzeniom:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa $P(A) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|}$

gdzie $\bar{A}$ to ilość równoprawdopodobnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , zaś $|\Omega|$ to ilość wszystkich zdarzeń elementarnych w przestrzeni Ω .

Obliczamy np. kombinatorycznie lub drzewkiem

20

Przypisywanie prawdopodobieństwa zdarzeniom - przykład

Przykład: W urnie znajdują się dwie kule białe i trzy czarne. Wybieramy losowo dwie kule bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie wyciągnięte kule będą tego samego koloru?

B – zdarzenie: wyciągnięto kulę białą (w jednym losowaniu)

C – zdarzenie: wyciągnięto kulę czarną (w jednym losowaniu)

BB – zdarzenie: wyciągnięto dwie kule białe

CC – zdarzenie: wyciągnięto dwie kule czarne

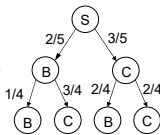
KK – zdarzenie: wyciągnięto dwie kule tego samego koloru

I sposób:

$$P(KK) = P(BB \cup CC) = P(BB) + P(CC) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 0.4$$

II sposób (metoda drzewka):

$$P(KK) = P(BB \cup CC) = P(BB) + P(CC) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = 0.4$$



21