

Poprzedni wykład

- Dystrybucja $F_X(x) = P(X \leq x)$
- funkcja rozkładu prawdopodobieństwa i funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$\forall k: P_X(x_k) = P(X = x_k) \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$
- ich charakterystyki
 - kwantyl rzędu p (dla zmiennej losowej X) $x_p: F_X(x_p) = p \quad (0 \leq p \leq 1)$
 - wartość oczekiwana X

$$E(X) = \sum_k P(x_k) x_k \quad \text{lub} \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x dx$$
 - odchylenie standardowe

$$\sigma(X) \equiv \sqrt{\text{var}(X)} \equiv \sqrt{E((X - E(X))^2)} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$$

1

Przykład: $E(X)$, $\text{var}(X)$, $\sigma(X)$ dla rozkładu jednorodnego

Niech zmienna losowa X ma rozkład jednorodny na $[a, b]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } x \in [a, b] \\ 0 & \text{dla } x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_a^b = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) =$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x^2 dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\text{var}(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} (4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2) =$$

$$= \frac{1}{12} (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b-a}{2}$$

czynnik $1/\sqrt{3}$ pojawia się w teorii błędów pomiarowych

2

Niepewności pomiarowe - dygresja

- Niepewności systematyczne (dokładność przyrządu, wydajność przyrządu, przybliżenia teoretyczne, ...)
- Niepewności statystyczne (pochodzące od losowej natury zjawiska i/lub czynników poza naszą kontrolą). Uwidacznia się przy powtarzaniu eksperymentu.
- Zał: zmierzona wartość X, oszacowana niepewność systematyczna Δ , oszacowane odchylenie standardowe $\sigma(X)$
- Zapis wyniku: $X(\sigma(X)) \pm \Delta$ lub (mniej precyzyjne) $X \pm \sigma(X) \pm \Delta$
 Np. $X=2.34$ $\Delta=0.01$ $\sigma(X)=0.12$: $2.34(12) \pm 0.01$ lub $2.34 \pm 0.12 \pm 0.01$
 W tym przykładzie $\Delta \ll \sigma(X)$ i wtedy Δ pomijamy: 2.34 ± 0.12
 Ale czasami chcemy podać jedną niepewność (=połączyć Δ oraz $\sigma(X)$)
Nie ma dobrej teorii, która pokazuje jak to zrobić.
Istnieje teoria jak łączyć niepewności statystyczne z różnych źródeł

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + \dots}$$

 Niektórzy zakładają, że niepewność systematyczna ma rozkład jednorodny co pozwala w miejsce Δ używać $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta$ co prowadzi do wzoru $\sigma = \sqrt{(\sigma_{\text{stat}})^2 + \frac{1}{3} \Delta^2}$

3

Inne parametry - momenty

- Momentem rzędu k względem początku układu współrzędnych dla zmiennej losowej X nazywamy**

$$\tilde{\mu}_k \equiv E(X^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

czyli

$$\tilde{\mu}_0 = 1 \quad \tilde{\mu}_1 = E(X)$$

- Momentem centralnym rzędu k dla zmiennej losowej X nazywamy**

$$\mu_k \equiv E((X - E(X))^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- czyli

$$\mu_0 = 1 \quad \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \text{var}(X)$$

4

Inne parametry – skośność i kurtoza

- Skośność** - miara asymetrii

$$\beta_1 \equiv \frac{\mu_3}{(\sigma(X))^3}$$

- Kurtoza** - miara skupienia (spłaszczenia)

$$\beta_2 \equiv \frac{\mu_4}{(\sigma(X))^4} - 3$$

Przykład: rozkład prostokątny i rozkłady trójkątne

5

Przykład: rozkłady trójkątne

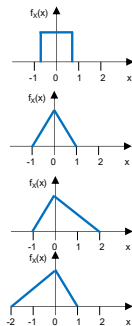
- Rozkład jednorodny na $x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$

spr. (normalizacja) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{e}} & \text{dla } x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}) \\ 0 & \text{dla } x \notin (\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}) \end{cases}$
 $N = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = 1$

- Rozkład trójkątny I $f_X(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ 1-x & \text{dla } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-1, 1) \end{cases}$

- Rozkład trójkątny II $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-1, 1) \end{cases}$

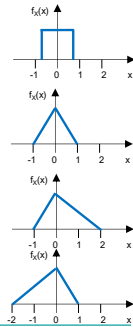
- Rozkład trójkątny III $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{dla } x \in (-2, 0] \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-2, 1) \end{cases}$



6

Przykład: rozkłady trójkątne

	Prostokątny	Trójkątny I	Trójkątny II	Trójkątny III
$E(X)$	0	0	1/3	-1/3
$E(X^2)$	1/6	1/6	1/2	1/2
$\text{var}(X)$	$1/6=0.16(6)$	$0.16(6)$	$7/18=0.38(8)$	$7/18$
$\sigma(X)$	0.41	0.41	0.62	0.62
μ_3	0	0	$2/27=0.07$	$-2/27$
μ_4	0.05	$0.06(6)$	$49/135=0.36$	$49/135$
β_1	0	0	0.305	-0.305
β_2	-1.2	-0.6	-0.6	-0.6



7

Transformacje zmiennych losowych

Syt. X – zmienna losowa $g(X)$ – funkcja o wartościach rzeczywistych $Y=g(X)$ też jest zmienną losowąPytanie: jak wygląda rozkład prawdopodobieństwa (funkcja gęstości prawdopodobieństwa) zmiennej losowej Y ■ Zmienna X jest dyskretnaWtedy również Y jest dyskretna. Niech x_i dla $i=1, \dots, j$ są takie, że $g(x_i)=y_k$. Wtedy

$$P_Y(y_k) = \sum_{i=1}^j P_X(x_i)$$

Przykład:

$$S_X = \{-2, 0, 2\} \quad P(X=-2)=1/4 \quad P(X=0)=1/4 \quad P(X=2)=1/2$$

$$Y=X^2$$

$$S_Y = \{0, 4\}$$

$$P(Y=0)=P(X=0)=1/4$$

$$P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=1/4+1/2=3/4$$

8

Transformacje zmiennych losowych

■ Zmienna X jest ciągła, $g(X)$ jest ciągłeWtedy również Y jest ciągłe.

■ I sposób (przez dystrybuantę)

Szukamy $F_Y(y)$ a z niej liczymy $f_Y(y)$

■ II sposób

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Ogólny przypadek – sumujemy po przedziałach monotoniczności $g(X)$

$$f_Y(y) = \sum_k f_{X,(k)}(x) \cdot \left| \frac{dx_{(k)}}{dy} \right|$$

Przykłady: $Y=X^2$, $Y=X^4$

9