Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 5

1. Egzaminator zadaje studentowi kolejno pytania. Prawdopodobieństwo udzielenia dobrej odpowiedzi na każde z pytań wynosi po 90%. Egzamin jest przerywany w chwili, gdy student nie umie odpowiedzieć na zadane pytanie. Podać rozkład zmiennej losowej X - liczby pytań zadanych przez egzaminatora. Podać najbardziej prawdopodobną liczbę zadanych pytań i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X. *Wskazówka: suma szeregu geometryczno-arytmetycznego dana jest wzorem:* $\sum_{k=0}^{\infty}(a+kd)r^k = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2}$ *dla* $|r| < 1$, r, d, a *to stałe.*

2. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona o parametrze λ. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y = 3X$.

3. Na płaszczyźnie (x, y) w punkcie o współrzędnych $(0, -1)$ znajduje się armata. Lufa armaty znajduje się w płaszczyźnie (x, y) i może obracać się wokół osi równoległej do osi z. Kąt θ pomiędzy kierunkiem lufy armatniej a osią y, przy którym następuje wystrzał wybiera się losowo z przedziału $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ zgodnie z rozkładem jednostajnym ($f(\theta) = 1/\pi$). Znajdź gęstość prawdopodobieństwa punktów przecięcia się lini strzału z osią x. Pocisk porusza się po linii prostej.

4. Wykazać, że jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z parametrami równymi odpowiednio $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$, to zmienna losowa Z=X+Y ma również rozkład Poissona o parametrze $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład jednorodny w przedziale [0,1]. Zmienna losowa Y=$max(X, \frac{1}{2})$. Proszę znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej losowej Y.

6. Zadanie komputerowe dla chętnych, aspirujących do podwyższenia oceny z całości kursu

   Zmienna losowa X, opisująca długość odcinka, ma rozkład jednorodny na przedziale (0,2).

   a) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa pól kwadratów o bokach o długości X.

   b) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa objętości sześcianów o bokach o długości X.

   c) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa objętości n-wymiarowych sześcianów o bokach o długości X.

   Zadanie proszę rozwiązać analitycznie (korzystając ze wzoru na wyznacznie funkcji gęstości prawdopodobieństwa funkcji zmiennej losowej o znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa) oraz numerycznie (narysować unormowany histogram objętości obliczonych na podstawie wylosowanych długości X). Przedstawić na jednym rysunku otrzymany histogram i wynik analityczny, osobno dla n=2,3,4,5 i 20.

W ogólnym przypadku c) sprawdzić normalizację rozkładu i obliczyć wartość oczekiwaną n-wymiarowej objętości (zmienna Y). Jakie będzie położenie E(Y) względem prawej granicy zakresu wartości Y w funkcji n ?

7. Gęstość prawdopodobieństwa prędkości (długość wektora prędkości) atomów w klasycznym gazie opisywana jest rozkładem Maxwella:

$$f(v) = Cv^2 exp[-\frac{mv^2}{2kT}], \qquad v \geq 0,$$

gdzie m to masa atomu, k - stała Boltzmanna (k=1.380658 $\times 10^{-23} JK^{-1}$), T - temperatura w skali bezwzględnej. Oczywiście $f(v) \equiv 0$ dla ujemnych v. Proszę znaleźć:

(a) stałą normalizacyjną C

(b) średnią wartość prędkości atomów E(v)

(c) modę rozkładu prędkości (wartość prędkości, dla której funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma maximum)

(d) funkcję gęstości prawdopodobieństwa energii kinetycznej atomów $f(\epsilon)$ ($\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$)

(e) średnią energię kinetyczną atomów $E(\epsilon)$

(f) modę rozkładu energii kinetycznej