Poprzednim razem:
Przestrzeń probabilistyczna

I: Przestrzeń próbek Ω (zbiór zdarzeń elementarnych)
II: Przestrzeń zdarzeń losowych: zbiór podzbiorów przestrzeni Ω próbek z dołączonym zbiorem pustym
III: funkcja prawdopodobieństwa P(A)

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Każdemu zdarzeniu A w przestrzeni próbek Ω przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą *P(A)* zwaną prawdopodobieństwem, tak by miała ona następujące własności:

I: $\forall A \subset \Omega \quad P(A) \geq 0$

II: $P(\Omega)=1$

III: Jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ jest ciągiem rozłącznych zdarzeń to $P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k)$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (sposób obliczania)

$$P(A) \equiv \frac{\#A}{\#\Omega}$$

1

Wnioski z aksjomatów

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Dow: $\begin{cases} \bar{A} \cup A = \Omega \\ \bar{A} \cap A = \emptyset \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(\bar{A} \cup A) = 1 \\ P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) \end{cases}$

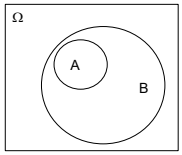
$\rightarrow \quad P(\bar{A}) + P(A) = 1 \quad \rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2. $P(A) \leq 1$
3. $P(\varphi) = 0$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dow:

$B = A \cup (\bar{A} \cap B) \quad \rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

$\rightarrow \quad P(A) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) \leq P(B)$



2

Wnioski z aksjomatów

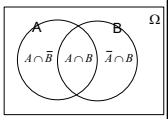
5. Dla dwóch zdarzeń rozłącznych: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. Dla dwóch dowolnych zdarzeń:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dow:

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$
$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$
$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$
$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

$P(A \cup B) = P\left((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)\right) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3

Wnioski z aksjomatów

7. Dla trzech dowolnych zdarzeń:

$P(A \cup B \cup C) =$

$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Dow:

$BC \equiv B \cup C$

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup BC) = P(A) + P(BC) - P(A \cap BC) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C)) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap A \cap C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

8. Dla większej liczby zdarzeń

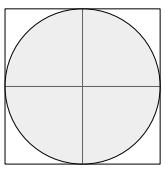
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

(dowód indukcyjnie)

4

Prawdopodobieństwo geometryczne

Prawdopodobieństwo geometryczne – miarą ilość zdarzeń elementarnych odpowiadających zdarzeniu A i przestrzeni zdarzeń Ω są pola (objętości) odpowiednich figur (brył) geometrycznych (np. wyznaczenie liczby π, igła Buffona).



$P_{kwadratu} = 4R^2$

$P_{koła} = \pi R^2$

$P(trafienia) = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$

$P(trafienia) = \frac{N_{trafień}}{N_{prób}}$

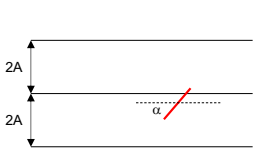
$\rightarrow \quad \pi = \frac{4N_{trafień}}{N_{prób}}$

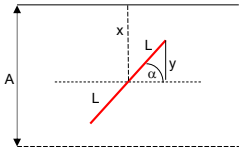
5

Igła, a w zasadzie patyczek, Buffona

Rzucamy patyczkiem o długości 2L na podłogę z desek (nieskończenie długich). Odległość pomiędzy deskami wynosi 2A, zakładamy L<A.
Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia: losowo rzucony patyczek przetnie krawędź desek ?

Do opisu położenia patyczka używamy dwóch zmiennych:
X – odległość środka patyczka do najbliższej krawędzi powyżej środka patyczka.
α – kąt (jak na rys.)





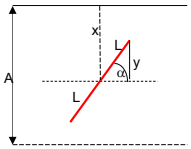
6

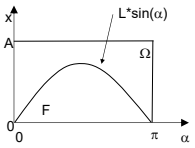
Igła, a w zasadzie patyczek, Buffona

Rozważmy sytuację 0<x<A, 0<α<π

Cała przestrzeń Ω: prostokąt o wymiarach A*π

Przecięcie krawędzi zajdzie dla x<Lsin(α) (y= Lsin(α))





$$F = \int_0^{\pi} l \cdot \sin(\alpha)\, d\alpha = -l \cdot \cos(\alpha)\Big|_0^{\pi} = -l \cdot (-1-1) = 2l$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = A \cdot \pi$$

$$P(\text{przecięcie krawędzi}) = \frac{F}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2l}{A \cdot \pi}$$

Co stanie się jeżeli dopuścimy -A<x<A ?

7

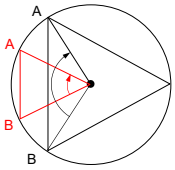
Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie I:

Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór kąta na którym oparta jest cięciwa



$$\Omega = [0, \pi] \rightarrow \overline{\overline{\Omega}} = \pi$$

$$Z = \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \rightarrow \overline{\overline{Z}} = \frac{\pi}{3}$$

$$P(Z) = \frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{1}{3}$$

8

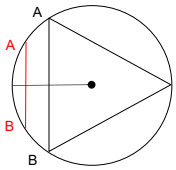
Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie II:

Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór odległości środka okręgu od cięciwy



$$\Omega = [0, R=1] \rightarrow \overline{\overline{\Omega}} = 1$$

$$Z = \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \overline{\overline{Z}} = \frac{1}{2}$$

$$P(Z) = \frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

9

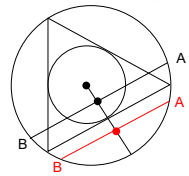
Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie III:

Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór punktu wewnątrz koła, który będzie środkiem cięciwy przechodzącej przez punkt i prostopadłej do promienia



$$\Omega = K(0,1) \rightarrow \overline{\overline{\Omega}} = \pi \cdot 1^2$$

$$Z = K\left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \overline{\overline{Z}} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(Z) = \frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Sposób losowania jest ważny ! Różne sposoby nie są równoważne !

10

11

Prawdopodobieństwo warunkowe

Sytuacja: A,B – to dwa zdarzenia w przestrzeni próbek Ω związanej z eksperymentem E, P(B)>0. W wyniku przeprowadzenia eksperymentu E stwierdzamy, że zaszło zdarzenie B.

Prawdopodobieństwo warunkowe to liczba

$$P(A \mid B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0$$

Powyższa definicja jest zgodna z definicją aksjomatyczną prawdopodobieństwa.

Odpowiada ona prawdopodobieństwu zdarzenia A w przestrzeni próbek ograniczonej do zdarzenia B.

12

Zgodność z aksjomatami

- Aksjomat I ($P(A) \geq 0$)
  $P(A \mid B) \geq 0$ gdyż $P(A \cap B) \geq 0 \wedge P(B) > 0$
- Aksjomat II ($P(\Omega)=1$), teraz B jest przestrzenią próbkowania
  $P(B \mid B) = 1$ gdyż $P(B \mid B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
- Aksjomat III (A_k rozłączne: $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$)

$$P((\bigcup_k A_k) \mid B) = \sum_k P(A_k \mid B) \quad \text{gdyż} \quad P((\bigcup_k A_k) \mid B) =$$

$$= \frac{P((\bigcup_k A_k) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_k (A_k \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_k P(A_k \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \sum_k \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_k P(A_k \mid B)$$

13

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A \mid B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0$$

- Każde prawdopodobieństwo jest warunkowe
  $P(A) = P(A \mid \Omega)$
- $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \mid B) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- $B \subset A \Rightarrow P(A \mid B) = 1$
- $P(A \mid B) > P(A) \Rightarrow P(B \mid A) > P(B)$
- Nie ma zależności pomiędzy wartościami P(A) i P(A|B).
- Można budować bardziej skomplikowane relacje.

14

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A \mid B) > P(A) \Rightarrow P(B \mid A) > P(B)$$

Dow:

$$P(A \mid B) > P(A) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A \mid B)}{P(A)} > 1$$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

$$P(A \mid B) = P(A) \cdot \frac{P(B \mid A)}{P(B)}$$

$$\underbrace{\frac{P(A \mid B)}{P(A)}}_{>1} = \frac{P(B \mid A)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(B \mid A)}{P(B)} > 1 \quad \Rightarrow \quad P(B \mid A) > P(B)$$

15