

Poprzedni wykład

- Zmienna losowa
 $\forall s \in S \xrightarrow{X(s)} x \in S_X$
- Dystrybuanta
 $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa i funkcja gęstości prawdopodobieństwa
 $\forall k: P_X(x_k) = P(X = x_k)$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

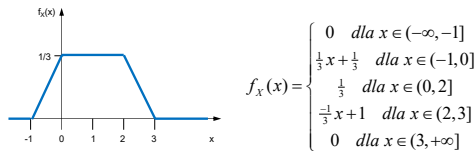
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

1

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

Syt: Zmienna losowa X opisywana jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa w kształcie trapezu



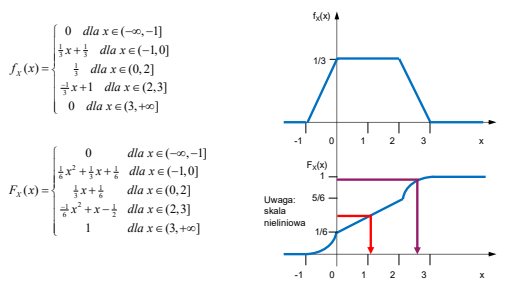
- Wysokość trapezu obliczamy z warunku normalizacji

$$\text{Pole trapezu} = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{(4+2) \cdot h}{2} = 3h \rightarrow 1 = 3h \rightarrow h = \frac{1}{3}$$
- Funkcję gęstości prawdopodobieństwa obliczamy wiedząc przez jakie punkty przechodzą poszczególne odcinki

2

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Generacja liczb pseudolosowych: odwracanie dystrybuanty



3

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Obliczamy funkcję odwrotną do dystrybuanty $F_X^{-1}(x)$
- $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (0, 2] \\ -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} & \text{dla } x \in (2, 3] \\ 1 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$
- dla $x \in (-1, 0]$: $F_X(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$
 $y \in (0, \frac{1}{6}]$: $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$
zmiana oznaczeń: $x = \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$
 $x = \frac{1}{3} \cdot (y^2 + 2y + 1)$
 $6x = (y+1)^2$
 $y = \sqrt{6x} - 1$ $x \in (0, \frac{1}{6}]$
- dla $x \in (0, 2]$: $F_X(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
 $y \in (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}]$: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
zmiana oznaczeń: $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$
 $y = 3x - \frac{1}{3}$ $x \in (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}]$
- dla $x \in (2, 3]$: $F_X(x) = -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6}$
 $y \in (\frac{2}{3}, 1]$: $y = -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6}$
zmiana oznaczeń: $x = \frac{1}{6} \cdot (y^2 - 6y + 3)$
 $x = \frac{1}{6} \cdot ((y-3)^2 - 6)$
 $-6x + 6 = (y-3)^2$
 $-\sqrt{-6x+6} = y-3$
 $y = 3 - \sqrt{-6x+6}$ $x \in (\frac{2}{3}, 1]$

4

Przykład: FGP (trapez) i odwracanie dystrybuanty

- Łącznie $F_X^{-1}(x)$

$$F_X^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{6x} - 1 & \text{dla } x \in (0, \frac{1}{6}] \\ 3x - \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}] \\ 3 - \sqrt{-6x+6} & \text{dla } x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Generator liczb pseudolosowych o badanej $f_X(x)$:

- Losujemy jednorodnie liczbę x z przedziału $(0, 1)$
- Obliczamy $y := F_X^{-1}(x)$ zgodnie z powyższym wzorem
- Zwracamy y
- Liczby y będą miały zadaną funkcję gęstości prawdopodobieństwa w przedziale $(-1, 3)$

Kiedy metoda odwracania dystrybuanty nie zadziała (od razu) ?

5

Odwracanie dystrybuanty jako metoda generowania liczb pseudolosowych

- Syt: dana funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$, chcemy uzyskać liczby pseudolosowe przez nią opisywane.
- Obliczamy dystrybuentę $F_X(x)$.
- Znajdujemy funkcję odwrotną do dystrybuanty $F_X^{-1}(x)$.
- Losujemy liczbę y z przedziału $(0, 1)$ używając „standardowego” (zaimplementowanego) generatora liczb pseudolosowych.
- Obliczmy $z = F_X^{-1}(y)$.
- Tak otrzymane liczby opisane są funkcją gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$

6

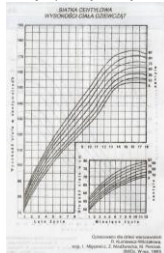
Globalny opis dystrybuanty i funkcji gęstości prawdopodobieństwa

- Kwantylem rzędu p** (dla zmiennej losowej X) nazywamy liczbę x_p : $F_X(x_p)=p$ ($0 \leq p \leq 1$)

W szczególności:

- **Mediana** to kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$
- **Kwartyle** to kwantyle rzędu $\frac{1}{4}$ (pierwszy kwantyl), rzędu $\frac{1}{2}$ (drugi kwantyl), rzędu $\frac{3}{4}$ (trzeci kwantyl)
- **Percentyle** to kwantyle rzędu 0.01, 0.02, ..., 0.99

- Moda** – wartość najbardziej prawdopodobna czyli $x: \max\{f_X(x)\}$



7

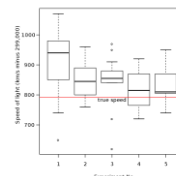
Globalny opis dystrybuanty i funkcji gęstości prawdopodobieństwa

- Kwantylem rzędu p** (dla zmiennej losowej X) nazywamy liczbę x_p : $F_X(x_p)=p$ ($0 \leq p \leq 1$)

W szczególności:

- **Mediana** to kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$
- **Kwartyle** to kwantyle rzędu $\frac{1}{4}$ (pierwszy kwantyl), rzędu $\frac{1}{2}$ (drugi kwantyl), rzędu $\frac{3}{4}$ (trzeci kwantyl)
- **Percentyle** to kwantyle rzędu 0.01, 0.02, ..., 0.99

- Moda** – wartość najbardziej prawdopodobna czyli $x: \max\{f_X(x)\}$



Źródło: Wikipedia

8

Wartość oczekiwana

- Wartością oczekiwaną** zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$E(X) = \sum_k P_X(x_k) x_k \quad \text{dla zmiennej dyskretnej}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x dx \quad \text{dla zmiennej ciągłej}$$

- Uwaga 1:** $E(X)$ jest średnią ważoną możliwych wartości zmiennej X z wagą daną przez $P_X(x)$ lub $f_X(x)$.
- Uwaga 2:** Dla zmiennej typu mieszanego łączymy obie definicje.
- Uwaga 3:** Spotyka się też warunkową wartość oczekiwaną, wtedy $P_X(x) \rightarrow P_X(x|A)$, $f_X(x) \rightarrow f_X(x|A)$.

9

Wartość oczekiwana - własności

- Operator $E(\cdot)$ jest liniowy: $E\left(\sum_{k=1}^n a_k g_k(x)\right) = \sum_{k=1}^n a_k E(g_k(x))$

Stąd (a, b – stałe):

$$E(a) = a$$

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

a_k – stałe,
 $g_k(x)$ – funkcje o wartościach rzeczywistych

- Niech Y to nowa zmienna losowa i niech $Y=g(X)$ wtedy

$$E(Y) = \sum_k P_X(x_k) g(x_k) \quad \text{dla zmiennej dyskretnej}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) g(x) dx \quad \text{dla zmiennej ciągłej}$$

10

Wariancja zmiennej losowej

- Wariancją zmiennej losowej** nazywamy liczbę:

$$\text{var}(X) \equiv \sigma_X^2 \equiv \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$$

- Wariancja jest miarą rozrzutu zmiennej losowej wokół wartości średniej i jest nieujemna
- $\text{var}(a)=0$ dla $a=\text{const}$
- $E(X-E(X))$ nie jest przydatną wielkością, gdyż $E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

- Odchylenie standardowe zmiennej losowej**

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$$

11

Wariancja zmiennej losowej - własności

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + b) &= E((aX + b - E(aX + b))^2) = \\ &= E((aX + b - aE(X) - b)^2) = E((aX - aE(X))^2) = \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) = a^2 E((X - E(X))^2) = a^2 \text{var}(X) \end{aligned}$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - 2E(XE(X)) + E((E(X))^2) = \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

12