Poprzednim razem

Wielowymiarowe zmienne losowe

- Łączny rozkład prawdopodobieństwa $P_{X,Y}(x_i, y_j)$
- Brzegowy rozkład prawdopodobieństwa $P_X(x_i) = \sum_j P_{X,Y}(x_i, y_j)$
- Łączna dystrybuanta $F_{X,Y}(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} P_{X,Y}(x_i, y_j)$
- Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\, du\, dv$$

1

Łączna dystrybuanta

7. $F_X(x) = P[X \le x] = P[X \le x, Y < +\infty] = F_{X,Y}(x, +\infty)$

$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$

- Prowadzi to do **dystrybuanty brzegowej**
- **Dystrybuanta brzegowa** zmiennej X to

$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$

a stąd **brzegowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa**

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} F_{X,Y}(x, +\infty) =$$

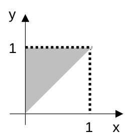
$$= \frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v)\, du\, dv\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,v)\, dv$$

2

Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

Syt. X,Y – ciągłe zmienne losowe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & dla\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & poza\ tym\ obszarem \end{cases}$$



- Normalizacja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = 1 \quad \to \quad \int_0^1 \int_x^1 c\, dy\, dx = 1$$

$$\int_0^1 \int_x^1 c\, dy\, dx = c \int_0^1 \int_x^1 1\, dy\, dx = c \int_0^1 y\Big|_x^1 dx = c \int_0^1 1 - x\, dx = c\left(x\Big|_0^1 - \tfrac{1}{2} x^2\Big|_0^1\right) =$$

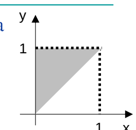
$$= c\left(1 - 0 - \tfrac{1}{2} + 0\right) = \tfrac{1}{2} c$$

$$\tfrac{1}{2} c = 1 \quad \to \quad c = 2$$

3

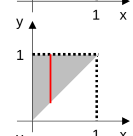
Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & dla\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & poza\ tym\ obszarem \end{cases}$$

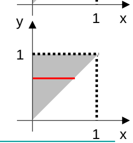


- Brzegowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_x^1 2\, dy = 2\, y\Big|_x^1 = 2(1-x)$$



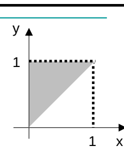
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_0^y 2\, dx = 2\, x\Big|_0^y = 2(y-0) = 2y$$



4

Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

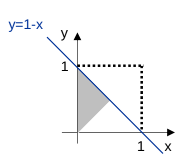
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & dla\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & poza\ tym\ obszarem \end{cases}$$



- Prawdopodobieństwo P(X+Y<1)

$$P(X+Y<1) = \iint_{\substack{odpowiedni \\ obszar}} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

X+Y<1 → Y<-X+1



$$P(X+Y<1) = \int_0^{0.5} \int_x^{1-x} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{0.5} \int_x^{1-x} 2\, dy\, dx =$$

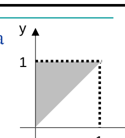
$$= 2\int_0^{0.5} y\Big|_x^{1-x} dx = 2\int_0^{0.5} 1 - x - x\, dx = 2\int_0^{0.5} 1 - 2x\, dx =$$

$$= 2\left(x - 2 \cdot \tfrac{1}{2} x^2\right)\Big|_0^{0.5} = 2\left(\tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 0 + 0\right) = 2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{2}$$

5

Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & dla\ 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & poza\ tym\ obszarem \end{cases}$$

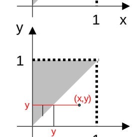


- Dystrybuanta $F_{X,Y}(x,y)$

1. $x < 0$ lub $y < 0$: $F_{X,Y}(x,y) = 0$
2. $0 < x < 1$ i $0 < y < x$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^y \int_{\tilde{x}}^y 2\, d\tilde{y}\, d\tilde{x} = 2\int_0^y \tilde{y}\Big|_{\tilde{x}}^y d\tilde{x} = 2\int_0^y (y - \tilde{x})\, d\tilde{x} =$$

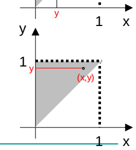
$$= 2\left(y\tilde{x} - \frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\Big|_0^y = 2(y^2 - \frac{1}{2} y^2 - 0 + 0) = y^2$$



3. $0 < x < 1$ i $x < y < 1$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_{\tilde{x}}^y 2\, d\tilde{y}\, d\tilde{x} = 2\int_0^y \tilde{y}\Big|_{\tilde{x}}^y d\tilde{x} = 2\int_0^y (y - \tilde{x})\, d\tilde{x} =$$

$$= 2\left(y\tilde{x} - \frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\Big|_0^x = 2(yx - \frac{1}{2} x^2 - 0 + 0) = 2xy - x^2$$



6

Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanta - przykład

4. $0 < x < 1 \quad i \quad y \geq 1$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_{\tilde{x}}^1 2\, d\tilde{y}\, d\tilde{x} = 2\int_0^x \tilde{y}\Big|_{\tilde{x}}^1 d\tilde{x} = 2\int_0^x (1-\tilde{x})\, d\tilde{x} =$$

$$= 2\left(\tilde{x} - \frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\Bigg|_0^x = 2(x - \frac{1}{2}x^2 - 0 + 0) = 2x - x^2$$

5. $x \geq 1 \quad i \quad 0 < y < 1$

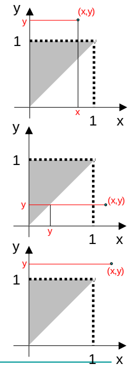
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^y \int_{\tilde{x}}^y 2\, d\tilde{y}\, d\tilde{x} = 2\int_0^y \tilde{y}\Big|_{\tilde{x}}^y d\tilde{x} = 2\int_0^y (y-\tilde{x})\, d\tilde{x} =$$

$$= 2\left(y\tilde{x} - \frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\Bigg|_0^y = 2(y^2 - \frac{1}{2}y^2 - 0 + 0) = y^2$$

6. $x \geq 1 \quad i \quad y \geq 1$

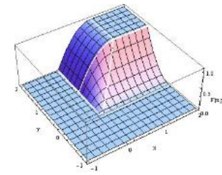
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^1 \int_{\tilde{x}}^1 2\, d\tilde{y}\, d\tilde{x} = 2\int_0^1 \tilde{y}\Big|_{\tilde{x}}^1 d\tilde{x} = 2\int_0^1 (1-\tilde{x})\, d\tilde{x} =$$

$$= 2\left(\tilde{x} - \frac{1}{2}\tilde{x}^2\right)\Bigg|_0^1 = 2(1 - \frac{1}{2}1^2 - 0 + 0) = 1$$



Niezależność zmiennych losowych

Wynik końcowy $F_{X,Y}(x,y)$:



- **Zmienne losowe** X,Y tworzące wektor losowy **są niezależne gdy**

$$\forall x,y \quad F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

- co jest równoważne

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x,y \quad P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) \\ \forall x,y \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \end{array}}$$

Kowariancja i korelacja zmiennych losowych

- Syt. Z=g(X,Y)

$$E(Z) = \begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j g(x_i, y_j) P_{X,Y}(x_i, y_j) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

- Wnioski: 1. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- Dla zmiennych niezależnych

  2. $E(g_1(X) \cdot g_2(Y)) = E(g_1(X)) \cdot E(g_2(Y))$

  w szczególności dla $g_1(X)=X$ i $g_2(Y)=Y$ $\quad E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
- Dla zmiennych zależnych

  $E(XY) \neq E(X) \cdot E(Y)$

  $cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

Kowariancja i korelacja zmiennych losowych

- Wzór $cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

  jest równoważny

$$\boxed{\begin{array}{l} cov(X,Y) = E\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \end{array}}$$

- Własności:

  1. $cov(X,X) = var(X) \geq 0$
  2. Kowariancja nie musi być nieujemna.
  3. Dla zmiennych niezależnych cov(X,Y)=0
  4. E(XY) nazywamy **korelacją zmiennych** X i Y

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

- **Współczynnik korelacji** zmiennych losowych X,Y (unormowana kowariancja) to

$$\boxed{\rho_{X,Y} \equiv \rho(X,Y) \equiv corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}}$$

- Własności:

  1. Współczynnik korelacji jest bezwymiarowy.
  2. $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

- 2. $\boxed{-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1}$

  Dowód:

Lemat (nierówność Schwartza): $\left(E(XY)\right)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

Dowód lematu:

$$E(X^2) \geq 0 \quad bo \quad E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^2}_{\geq 0} \underbrace{f_X(x)}_{\geq 0}\, dx$$

Przypadek 1: $E(X^2)>0$

$$g(z) \equiv E\left[(Y - zX)^2\right] = E\left[Y^2 + z^2X^2 - 2zXY\right] = E\left[Y^2\right] + z^2E\left[X^2\right] - 2zE\left[XY\right]$$

g(z) jest parabolą, ramiona do góry, g≥0 gdyż jest E(nieujemna funkcja)→Δ≤0

$$\Delta = 4\left(E\left[XY\right]\right)^2 - 4E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]$$

$$\Delta \leq 0 \ \rightarrow \ 4\left(E\left[XY\right]\right)^2 - 4E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right] \leq 0 \ \rightarrow \ \left(E\left[XY\right]\right)^2 \leq E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]$$

Przypadek 2: $E(X^2)=0$

$$\rightarrow \ X = 0 \ \rightarrow \begin{cases} \left(E\left[XY\right]\right)^2 = \left(E\left[0 \cdot Y\right]\right)^2 = \left(E\left[0\right]\right)^2 = 0 \\ E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right] = E\left[0^2\right]E\left[Y^2\right] = 0 \end{cases} \rightarrow \ \left(E\left[XY\right]\right)^2 = E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]$$

□

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

Dowód twierdzenia:

Weźmy X→X-E(X), Y→Y-E(Y), wtedy z lematu

$$\left(E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]\right)^2 \le E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)E\left(\left(Y-E(Y)\right)^2\right)$$

$$\left(\operatorname{cov}(X,Y)\right)^2 \le \operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)$$

$$-\sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)} \le \operatorname{cov}(X,Y) \le \sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)}$$

$$-1 \le \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)}} \le 1 \quad\rightarrow\quad -1 \le \rho_{X,Y} \le 1 \qquad \square$$

- 3. Dla X,Y niezależnych $\rho_{X,Y}=0$.

Dowód:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right] =$$
$$= E\left[\left(X-E(X)\right)\right]\cdot E\left[\left(Y-E(Y)\right)\right] = 0\cdot 0 = 0$$
$$\rightarrow \quad \rho_{X,Y} = 0$$

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

4. **Współczynnik korelacji jest miarą zależności liniowej**

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_{X,Y} = 1 \quad dla \quad Y = aX+b \quad a>0 \\ \rho_{X,Y} = -1 \quad dla \quad Y = aX+b \quad a<0 \end{array}}$$

Dowód:

$$Y = aX+b$$

$$\rightarrow \quad E(Y) = E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$\operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(aX+b) = a^2\operatorname{var}(X)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right] = E\left[\left(X-E(X)\right)\left(aX+b-aE(X)-b\right)\right] =$$

$$= E\left[\left(X-E(X)\right)\left(aX-aE(X)\right)\right] = aE\left[\left(X-E(X)\right)\left(X-E(X)\right)\right] =$$

$$= aE\left[\left(X-E(X)\right)^2\right] = a\operatorname{var}(X)$$

$$\rightarrow \quad \rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}} = \frac{a\operatorname{var}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot a^2\operatorname{var}(X)}} = \frac{a\operatorname{var}(X)}{\sqrt{a^2\left(\operatorname{var}(X)\right)^2}} = \frac{a\operatorname{var}(X)}{|a|\operatorname{var}(X)} = \frac{a}{|a|}$$

Współczynnik korelacji zmiennych losowych

- 5. Jeżeli $\rho_{X,Y}=0$ to zmienne X i Y nie muszą być niezależne; nazywamy je wtedy **nieskorelowanymi.**

  Ważny wyjątek: jeżeli X i Y mają rozkłady normalne i $\rho_{X,Y}=0$ to zmienne X i Y są niezależne.
- 6. Jeżeli $\rho_{X,Y}\neq 0$ to zmienne X i Y nie są niezależne.
- **Macierz kowariancji**

$$K_{X_1,\ldots,X_n} = \begin{pmatrix} var(X_1) & cov(X_1,X_2) & \ldots & cov(X_1,X_n) \\ cov(X_1,X_2) & var(X_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ cov(X_1,X_n) & \ldots & \ldots & var(X_n) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2-dim}} K_{X,Y} = \begin{pmatrix} var(X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & var(Y) \end{pmatrix}$$

Jest symetryczna, bo $cov(X_i,X_j)=cov(X_j,X_i)$.

$$V_N = \frac{2}{N}\frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$$

- Korelacja jako narzędzie testowania generatorów liczb pseudolosowych ($\rho_{X,Y}=0$), zadania kontrolne, np. N-wymiarowa kula o R=1.