Podsumowanie: przestrzeń probabilistyczna

Formalnie eksperymenty losowe opisujemy zatem za pomocą trzech elementów:

I: Przestrzeń próbek Ω (zbiór zdarzeń elementarnych)

II: Przestrzeń zdarzeń losowych: zbiór podzbiorów przestrzeni Ω próbek z dołączonym zbiorem pustym (σ-ciało)

III: funkcja prawdopodobieństwa P(A)
np. obliczane poprzez (klasyczna definicja prawdopodobieństwa) ze wzoru
(ćwiczenia)

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Każdemu zdarzeniu A w przestrzeni próbek Ω przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą *P(A)* zwaną prawdopodobieństwem, tak by miała ona następujące własności:

I: $\forall A \subset \Omega \quad P(A) \geq 0$

II: $P(\Omega)=1$

III: Jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ jest ciągiem rozłącznych zdarzeń to $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$

Wnioski z aksjomatów

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Dow: $\begin{cases} \bar{A} \cup A = \Omega \\ \bar{A} \cap A = \emptyset \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(\bar{A} \cup A) = 1 \\ P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) \end{cases}$

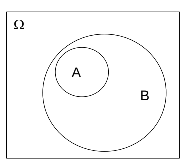
$\rightarrow \; P(\bar{A}) + P(A) = 1 \;\rightarrow\; P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2. $P(A) \leq 1$
3. $P(\varphi) = 0$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dow:

$B = A \cup (\bar{A} \cap B) \;\rightarrow\; P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

$\rightarrow\; P(A) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) \leq P(B)$



Wnioski z aksjomatów

5. Dla dwóch zdarzeń rozłącznych: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. Dla dwóch dowolnych zdarzeń:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dow:

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

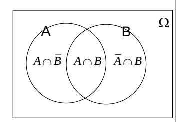
$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$

$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

$P(A \cup B) = P\big((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)\big) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Wnioski z aksjomatów

7. Dla trzech dowolnych zdarzeń:

$P(A \cup B \cup C) =$

$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Dow:

$BC \equiv B \cup C$

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup BC) = P(A) + P(BC) - P(A \cap BC) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C)) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap A \cap C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

8. Dla większej liczby zdarzeń

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

(dowód indukcyjnie)

Przypisywanie prawdopodobieństwa zdarzeniom:

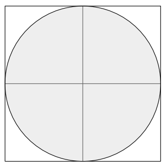
Klasyczna definicja prawdopodobieństwa $P(A) \equiv \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

gdzie $\overline{\overline{A}}$ to ilość równoprawdopodobnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A,
zaś $\overline{\overline{\Omega}}$ to ilość wszystkich zdarzeń elementarnych w przestrzeni Ω.

Obliczamy np. kombinatorycznie lub drzewkiem

Prawdopodobieństwo geometryczne

Prawdopodobieństwo geometryczne – miarą ilość zdarzeń elementarnych odpowiadających zdarzeniu A i przestrzeni zdarzeń Ω są pola (objętości) odpowiednich figur (brył) geometrycznych (np. wyznaczenie liczby π, igła Buffona).



$$P_{kwadratu} = 4R^2$$
$$P_{koła} = \pi R^2$$
$$P(trafienia) = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$$
$$P(trafienia) = \frac{N_{trafień}}{N_{prób}}$$
$$\rightarrow \quad \pi = \frac{4N_{trafień}}{N_{prób}}$$

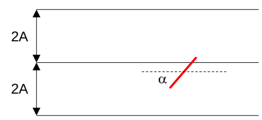
RPiS 2024/2025 7

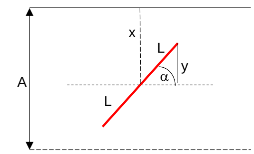
7

Igła, a w zasadzie patyczek, Buffona

Rzucamy patyczkiem o długości 2L na podłogę z desek (nieskończenie długich). Odległość pomiędzy deskami wynosi 2A, zakładamy L<A.
Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia: losowo rzucony patyczek przetnie krawędź desek ?

Do opisu położenia patyczka używamy dwóch zmiennych:
X – odległość środka patyczka do najbliższej krawędzi powyżej środka patyczka.
α – kąt (jak na rys.)



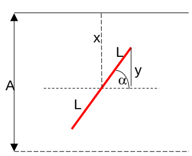


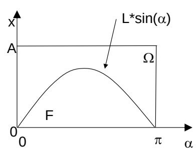
RPiS 2024/2025 8

8

Igła, a w zasadzie patyczek, Buffona

Rozważmy sytuację 0<x<A, 0<α<π
Cała przestrzeń Ω: prostokąt o wymiarach A*π
Przecięcie krawędzi zajdzie dla x<Lsin(α) (y= Lsin(α))





$$F = \int_0^{\pi} l \cdot \sin(\alpha)\, d\alpha = -l \cdot \cos(\alpha)\Big|_0^{\pi} = -l \cdot (-1-1) = 2l$$
$$\overline{\overline{\Omega}} = A \cdot \pi$$
$$P(przecięcie\ krawędzi) = \frac{F}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{2l}{A \cdot \pi}$$

Co stanie się jeżeli dopuścimy -A<x<A ?

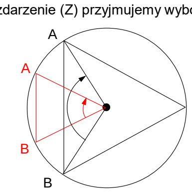
RPiS 2024/2025 9

9

Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie I:
Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór kąta na którym oparta jest cięciwa



$$\Omega = [0, \pi] \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{\Omega}} = \pi$$
$$Z = \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{Z}} = \frac{\pi}{3}$$
$$P(Z) = \frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{1}{3}$$

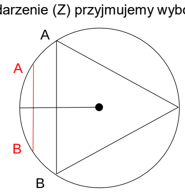
RPiS 2024/2025 10

10

Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie II:
Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór odległości środka okręgu od cięciwy



$$\Omega = [0, R=1] \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{\Omega}} = 1$$
$$Z = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{Z}} = \frac{1}{2}$$
$$P(Z) = \frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

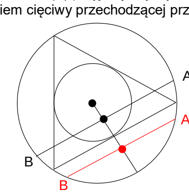
RPiS 2024/2025 11

11

Paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu R=1 skonstruowano losowo cięciwę AB.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

Rozwiązanie III:
Za zdarzenie (Z) przyjmujemy wybór punktu wewnątrz koła, który będzie środkiem cięciwy przechodzącej przez punkt i prostopadłej do promienia



$$\Omega = K(0,1) \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{\Omega}} = \pi \cdot 1^2$$
$$Z = K\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{Z}} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$P(Z) = \frac{\overline{\overline{Z}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Sposób losowania jest ważny ! Różne sposoby nie są równoważne !

RPiS 2024/2025 12

12

Prawdopodobieństwo warunkowe

Sytuacja: A,B – to dwa zdarzenia w przestrzeni próbek Ω związanej z eksperymentem E, P(B)>0. W wyniku przeprowadzenia eksperymentu E stwierdzamy, że zaszło zdarzenie B.

Prawdopodobieństwo warunkowe to liczba

$$\boxed{P(A|B) \equiv \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)>0}$$

Powyższa definicja jest zgodna z definicją aksjomatyczną prawdopodobieństwa.

Odpowiada ona prawdopodobieństwu zdarzenia A w przestrzeni próbek ograniczonej do zdarzenia B.

13

Prawdopodobieństwo warunkowe

- A – zdarzenie polegające na wylosowaniu „4”
- B – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby parzystej

Ω={1,2,3,4,5,6}
A={4}
B={2,4,6} → P(B)=1/2
A$\cap$B={4} → P(A$\cap$B)=1/6 $\qquad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

Traktując B jako Ω mamy
Ω'={2,4,6}
A={4}
i od razu $P(A|B) = \frac{1}{3}$

14

Zgodność z aksjomatami

- Aksjomat I ($P(A)\geq 0$)

  $P(A|B)\geq 0$ gdyż $P(A\cap B)\geq 0 \wedge P(B)>0$
- Aksjomat II ($P(\Omega)$=1), teraz B jest przestrzenią próbkowania

  $P(B|B)=1$ gdyż $P(B|B) = \frac{P(B\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
- Aksjomat III (A_k rozłączne: $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$)

$$P((\bigcup_k A_k)|B) = \sum_k P(A_k|B) \quad \text{gdyż} \quad P((\bigcup_k A_k)|B) =$$

$$= \frac{P((\bigcup_k A_k)\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_k (A_k\cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_k P(A_k\cap B)}{P(B)} =$$

$$= \sum_k \frac{P(A_k\cap B)}{P(B)} = \sum_k P(A_k|B)$$

15

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

$$\boxed{P(A|B) \equiv \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)>0}$$

- Każde prawdopodobieństwo jest warunkowe

  $P(A) = P(A|\Omega)$
- $A\cap B = \phi \Rightarrow P(A|B) = 0$
- $A\subset B \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- $B\subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$
- $P(A|B) > P(A) \Rightarrow P(B|A) > P(B)$
- Nie ma zależności pomiędzy wartościami P(A) i P(A|B).
- Można budować bardziej skomplikowane relacje.

16

Kilka własności prawdopodobieństwa warunkowego

$P(A|B) > P(A) \Rightarrow P(B|A) > P(B)$

Dow:

$$P(A|B) > P(A) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(A|B)}{P(A)} > 1$$

$$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B) = P(B|A)\cdot P(A)$$

$$P(A|B) = P(A)\cdot \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

$$\underbrace{\frac{P(A|B)}{P(A)}}_{>1} = \frac{P(B|A)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(B|A)}{P(B)} > 1 \quad \Rightarrow \quad P(B|A) > P(B)$$

17

Partycja przestrzeni próbek

Zbiór zdarzeń B_k k=1,2,…,n tworzy partycję przestrzeni próbek Ω jeżeli:

I: $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \phi$

II: $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$

np. zdarzenie A i przeciwne do niego zdarzenie Ω\A tworzą partycję przestrzeni Ω.

Zał: zbiory B_1,…,B_n tworzą partycje przestrzeni Ω, $\forall i : P(B_i) > 0$

a zdarzenie A$\subset$ Ω. Wtedy zachodzi **reguła całkowitego prawdopodobieństwa**:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

18

Wzór Bayesa

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego

$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$ dla $P(B) > 0$

$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$ dla $P(A) > 0$

Łącznie otrzymujemy **wzór Bayesa**

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}}$$

Stosując powyższe dla $B=B_k$ tworzącego partycję przestrzeni Ω dostajemy

$$\boxed{P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}}$$

Wzór Bayesa

Prawdopodobieństwo *a priori* – prawdopodobieństwo zdarzenia przed wprowadzeniem dodatkowej informacji
Prawdopodobieństwo *a posteriori* – prawdopodobieństwo zdarzenia po wprowadzeniu dodatkowej informacji

Przykłady:

I. Losowanie kul z urny
II. Test medyczny (ćwiczenia)

Przykład: Losowanie kul

W urnie jest 6 kul, białe i czarne (co najmniej jedna biała i co najmniej jedna czarna). Ile jest kul białych, a ile czarnych ?

Niech M_i – układ z *i* kulami czarnymi w urnie

A priori $P(M_i)=1/5=0.2$

Losujemy dwie kule i obie okazują się białe (zdarzenie BB).
Jak teraz oszacujemy $P(M_i)$?

$$P(M_i \mid BB) = \frac{P(BB \mid M_i) \cdot P(M_i)}{P(BB)}$$

ale

$$P(BB \mid M_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{6} = 0.667$$
$$P(BB \mid M_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = 0.4$$
$$P(BB \mid M_3) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30} = 0.2$$
$$P(BB \mid M_4) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = 0.067$$
$$P(BB \mid M_5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = \frac{0}{30} = 0$$

$$\rightarrow \quad P(BB) = \sum_i P(BB \mid M_i) \cdot P(M_i) =$$
$$= 0.667 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 + \ldots + 0 \cdot 0.2 = 0.2668$$

Przykład: Losowanie kul cd

Zatem prawdopodobieństwa a posteriori

$$P(M_i \mid BB) = \frac{P(BB \mid M_i) \cdot P(M_i)}{P(BB)}$$

$$P(M_1 \mid BB) = \frac{0.667 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.50$$
$$P(M_2 \mid BB) = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.30$$
$$P(M_3 \mid BB) = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.15$$
$$P(M_4 \mid BB) = \frac{0.067 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.05$$
$$P(M_5 \mid BB) = \frac{0 \cdot 0.2}{0.2668} = 0.00$$

- Prawdopodobieństwa a posteriori są różne od tych a priori
- Prawdopodobieństwa są różne dla różnych układów początkowych M_i
- Niektóre układy zostały wykluczone