

## Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 5

1. Egzaminator zadaje studentowi kolejno pytania. Prawdopodobieństwo udzielenia dobrej odpowiedzi na każde z pytań wynosi po 90%. Egzamin jest przerywany w chwili, gdy student nie umie odpowiedzieć na zadane pytanie. Podać rozkład zmiennej losowej  $X$  - liczby pytań zadanych przez egzaminatora. Podać najbardziej prawdopodobną liczbę zadanych pytań i wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $X$ .

*Wskazówka: suma szeregu geometryczno-arytmetycznego dana jest wzorem:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a + kd)r^k = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2} \text{ dla } |r| < 1, r, d, a \text{ to stałe.}$$

2. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona o parametrze  $\lambda$ . Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $Y = 3X$ .
3. Na płaszczyźnie  $(x, y)$  w punkcie o współrzędnych  $(0, -1)$  znajduje się armata. Lufa armaty znajduje się w płaszczyźnie  $(x, y)$  i może obracać się wokół osi równoległej do osi  $z$ . Kąt  $\theta$  pomiędzy kierunkiem lufy armatniej a osią  $y$ , przy którym następuje wystrzał wybiera się losowo z przedziału  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  zgodnie z rozkładem jednostajnym ( $f(\theta) = 1/\pi$ ). Znajdź gęstość prawdopodobieństwa punktów przecięcia się linii strzału z osią  $x$ . Pocisk porusza się po linii prostej.
4. Wykazać, że jeśli  $X$  i  $Y$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z parametrami równymi odpowiednio  $\lambda_1 > 0$  i  $\lambda_2 > 0$ , to zmienna losowa  $Z=X+Y$  ma również rozkład Poissona o parametrze  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .
5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednorodny w przedziale  $[0,1]$ . Zmienna losowa  $Y=\max(X, \frac{1}{2})$ . Proszę znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $Y$ .

6. Zadanie komputerowe dla chętnych, aspirujących do podwyższenia oceny z całości kursu

Zmienna losowa  $X$ , opisująca długość odcinka, ma rozkład jednorodny na przedziale  $(0,2)$ .

a) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa pól kwadratów o bokach o długości  $X$ .

b) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa objętości sześcianów o bokach o długości  $X$ .

c) Proszę znaleźć funkcję gęstości prawdopodobieństwa objętości  $n$ -wymiarowych sześcianów o bokach o długości  $X$ .

Zadanie proszę rozwiązać analitycznie (korzystając ze wzoru na wyznacznik funkcji gęstości prawdopodobieństwa funkcji zmiennej losowej o znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa) oraz numerycznie (narysować unormowany histogram objętości obliczonych na podstawie wylosowanych długości  $X$ ). Przedstawić na jednym rysunku otrzymany histogram i wynik analityczny, osobno dla  $n=2,3,4,5$  i 20.

W ogólnym przypadku c) sprawdzić normalizację rozkładu i obliczyć wartość oczekiwaną  $n$ -wymiarowej objętości (zmienna  $Y$ ). Jakie będzie położenie  $E(Y)$  względem prawej granicy zakresu wartości  $Y$  w funkcji  $n$  ?

7. Gęstość prawdopodobieństwa prędkości (długość wektora prędkości) atomów w klasycznym gazie opisywana jest rozkładem Maxwella:

$$f(v) = C v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right], \quad v \geq 0,$$

gdzie  $m$  to masa atomu,  $k$  - stała Boltzmannna ( $k=1.380658 \times 10^{-23} JK^{-1}$ ),  $T$  - temperatura w skali bezwzględnej. Oczywiście  $f(v) \equiv 0$  dla ujemnych  $v$ . Proszę znaleźć:

- (a) stałą normalizacyjną  $C$
- (b) średnią wartość prędkości atomów  $E(v)$
- (c) modę rozkładu prędkości (wartość prędkości, dla której funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma maximum)
- (d) funkcję gęstości prawdopodobieństwa energii kinetycznej atomów  $f(\epsilon)$  ( $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$ )
- (e) średnią energię kinetyczną atomów  $E(\epsilon)$
- (f) modę rozkładu energii kinetycznej