23.10.2026 wykład w sali A-1-03

Poprzedni wykład

Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(A \mid B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) > 0$$

1

Partycja przestrzeni próbek

Zbiór zdarzeń B_k k=1,2,…,n tworzy partycję przestrzeni próbek Ω jeżeli:

I: $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \phi$

II: $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$

np. zdarzenie A i przeciwne do niego zdarzenie $\Omega \backslash A$ tworzą partycję przestrzeni Ω.

Zał: zbiory $B_1,\ldots,B_n$ tworzą partycje przestrzeni Ω, $\forall i : P(B_i) > 0$ a zdarzenie $A \subset \Omega$. Wtedy zachodzi **reguła całkowitego prawdopodobieństwa**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

2

Wzór Bayesa

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego

$P(A \cap B) = P(A \mid B) P(B)$ dla $P(B) > 0$

$P(A \cap B) = P(B \mid A) P(A)$ dla $P(A) > 0$

Łącznie otrzymujemy **wzór Bayesa**

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) P(B)}{P(A)}$$

Stosując powyższe dla B=B_k tworzącego partycję przestrzeni Ω dostajemy

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_k) P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)}$$

3

Wzór Bayesa

Prawdopodobieństwo *a priori* – prawdopodobieństwo zdarzenia przed wprowadzeniem dodatkowej informacji

Prawdopodobieństwo *a posteriori* – prawdopodobieństwo zdarzenia po wprowadzeniu dodatkowej informacji

Przykłady:

I. Losowanie kul z urny
II. Test medyczny (ćwiczenia)

4

Analiza bayesowska (jakościowy przykład wyników)

- Rzut monetą: do wyznaczenia P(O)
  a priori + eksperyment 90 orłów w 100 rzutach → a posteriori

1. P(O)=0.5
   → analiza doprowadzi do P(O)≈0.86
2. P(O) – rozkład wokół 0.5
   → analiza doprowadzi do rozkładu wokół P(O) ≈0.86
3. P(O) – rozkład wokół 0.3
   → analiza doprowadzi do rozkładu wokół P(O) ≈0.80
4. P(O) – rozkład jednorodny na [0,1]
   → analiza doprowadzi do rozkładu wokół P(O) ≈0.90

Im więcej danych tym bardziej różne P(O) a priori będą zbiegać się do tego samego P(O) a posteriori.

5

Wzór „łańcuchowy”

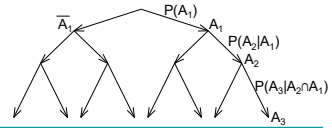
Zał. $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$

Wtedy zachodzi wzór:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times$$
$$\times \ldots \times P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

-dowód – iteracja definicji prawdopodobieństwa warunkowego

-uzasadnia metodę „drzewka”



6

Niezależność zdarzeń

- Dwa zdarzenia A i B (P(A)>0 i P(B)>0) są **niezależne** gdy:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \wedge \quad P(B \mid A) = P(B)$$

- Warunek wystarczający i konieczny niezależności:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

7

Niezależność zdarzeń

- Dowód ⇨

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad / \cdot P(B)$$
$$P(A \mid B)P(B) = P(A \cap B)$$
$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

- Dowód ⇦

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \mid B)P(B) = P(A)P(B) \quad / : P(B)$$
$$P(A \mid B) = P(A)$$

- Analogicznie dla drugiej równości *P(B|A)=P(B)*

8

Niezależność zdarzeń

- Zdarzenia niezależne nie muszą być rozłączne

  Tw. Jeżeli zdarzenia A i B są rozłączne i niezależne to P(A)=0 lub P(B)=0 lub P(A)=P(B)=0

  Dowód:

$$P(A \cap B) = P(\phi) = 0 \quad \text{(z rozłączności)}$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{(z niezależności)}$$

  czyli $P(A)P(B) = 0$

- Przykład: losowanie liczb całkowitych
- Nie należy mylić **niezależności** zdarzeń z **rozłącznością** zdarzeń!

9

Przykład: losowanie liczb całkowitych

Zdarzenie A – liczba jest podzielna przez 3
Zdarzenie B – liczba jest podzielna przez 7

- Losujemy liczbę całkowitą z przedziału [1,20]

A={3,6,9,12,15,18} B={7,14} A∩B=ϕ

$P(A) = 6/20 \quad P(B) = 2/20 \quad P(A \cap B) = 0 \quad P(A) \cdot P(B) = 6 \cdot 2 / 20^2 = 12/20^2 \neq P(A \cap B)$

→ Zdarzenia A i B są rozłączne i nie są niezależne

- Losujemy liczbę całkowitą z przedziału [1,21]

A={3,6,9,12,15,18,21} B={7,14,21} A∩B={21}

$P(A) = 7/21 \quad P(B) = 3/21 \quad P(A \cap B) = 1/21 \quad P(A) \cdot P(B) = 7 \cdot 3 / 21^2 = 1/21 = P(A \cap B)$

→ Zdarzenia A i B nie są rozłączne i są niezależne

- Losujemy liczbę całkowitą z przedziału [1,22]

A={3,6,9,12,15,18,21} B={7,14,21} A∩B={21}

$P(A) = 7/22 \quad P(B) = 3/22 \quad P(A \cap B) = 1/22 \quad P(A) \cdot P(B) = 7 \cdot 3 / 22^2 = 21/22^2 \neq P(A \cap B)$

→ Zdarzenia A i B nie są rozłączne i nie są niezależne

Jak dobrać przedział otrzymać czwartą możliwość ?

10

Przykład: losowanie liczb całkowitych

Zdarzenie A – liczba jest podzielna przez 3
Zdarzenie B – liczba jest podzielna przez 7

- Losujemy liczbę całkowitą z przedziału [1,6]

A={3,6} B=ϕ A∩B=ϕ

$P(A) = 2/6 \quad P(B) = 0 \quad P(A \cap B) = 0 \quad P(A) \cdot P(B) = 2 \cdot 0 / 6 = 0 = P(A \cap B)$

→ Zdarzenia A i B są rozłączne i są niezależne

→ Nie należy mylić **niezależności** zdarzeń z **rozłącznością** zdarzeń!

11

Niezależność zdarzeń

- Warunek wystarczający i konieczny **niezależności warunkowej**: $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)$
- Nie należy mylić niezależności zdarzeń z niezależnością warunkową zdarzeń!

- **Zdarzenia** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **są parami niezależne** gdy:

$$\forall i \neq j : P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

  ((n-1)n/2 warunków)

- **Zdarzenia** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **są globalnie niezależne** gdy:

$$\forall k \leq n : P(A_{k1} \cap A_{k2} \cap \ldots \cap A_{kk}) = P(A_{k1})P(A_{k2})\ldots P(A_{kk})$$

gdzie A_{kj} to dowolne, różne zdarzenia spośród zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$.

12

Zmienne losowe

13

Zmienne losowe

Syt. Eksperyment losowy E i związana z nim przestrzeń zdarzeń S≡Ω, zbudowana ze zdarzeń s.

- **Zmienną losową** nazywamy funkcję X, która każdemu zdarzeniu s∈S przyporządkowuje liczbę rzeczywistą X(s)=x

$$\forall s \in S \xrightarrow{X(s)} x \in S_X$$

- X – nazwa zmiennej losowej (funkcji)
- x – wartości zmiennej losowej X
- S_X – zbiór wartości zmiennej losowej X (dyskretny → dyskretna zmienna losowa; ciągły → ciągła zmienna losowa; mieszany → mieszana zmienna losowa)

Np. rzut kostką; X=liczba wyrzuconych oczek; S_X={1,2,3,4,5,6}
Np. rzut kostką; X=kwadrat liczby wyrzuconych oczek; S_X={1,4,9,16,25,36}
Np. rzut kostką; X=odległość od „4"; S_X={3,2,1,0,1,2}={0,1,2,3}
Np. rzut kostką; X=liczba rzutów aż wypadnie sześć oczek; S_X={1,2,3,…}

14

Zmienne losowe

- Dla jednego eksperymentu można zdefiniować wiele zmiennych losowych
- Zbiór wartości S_X ma nie więcej elementów niż przestrzeń S
- Jeżeli S jest dyskretna to S_X jest dyskretny
- Jeżeli S jest ciągłą przestrzenią to S_X może być ciągły lub dyskretny

Np. losujemy liczbę a z przedziału <0,10); X=a^2; S_X=<0,100)
Np. losujemy liczbę a z przedziału <0,10); X=część całkowita a; S_X={0,1,2,…,9}

Typy zmiennych losowych

- **Dyskretna zmienna losowa** – zmienna, która przyjmuje co najwyżej przeliczalnie nieskończoną liczbę wartości
- **Ciągła zmienna losowa** - zmienna, która przyjmuje nieskończenie wiele (w sposób nieprzeliczalny) wartości
- **Mieszana zmienna losowa** - zmienna, która przyjmuje nieskończenie wiele (w sposób nieprzeliczalny) wartości, a niektóre spośród jej wartości są wielkościami dyskretnymi. Jest zdefiniowana jednocześnie na dyskretnym zbiorze zdarzeń (skończonym lub przeliczalnie nieskończonym) i ciągłym zbiorze zdarzeń (nieprzeliczalnie nieskończonym)

15

Zmienne losowe

$$\forall s \in S \xrightarrow{X(s)} x \in S_X$$

Zdarzeniem ze względu na S_X nazywamy podzbiór S_X.

- Zdarzenie A∈S i zbiór wartości A_X∈S_X są równoważne (ekwiwalentne) gdy

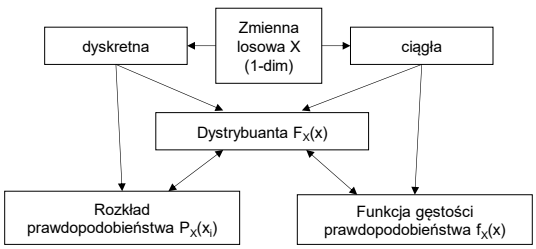
$$\forall s \in A: X(s) \in A_X$$
$$\forall s_X \in A_X: \exists s \in S: X(s) = s_X$$

- Inaczej mówiąc zdarzenie A i zdarzenie (ze względu na S_X) A_X są równoważne, wówczas $P(A)=P(A_X)$
- Czyli **zamiast operować na zdarzeniach możemy operować na zbiorach wartości w przestrzeni S_X**

Przykład: Eksperyment: rzucamy trzy razy uczciwą monetą
S={OOO,OOR,ORO,ORR,ROO,RRO,ROR,RRR}, zdarzenia elementarne równoprawdopodobne
Zdarzenie A: wypadła parzysta liczba orłów
Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: {OOR,ORO,ROO,RRR}
P(A)=4/8=1/2
Zmienna losowa X – liczba orłów w trzech rzutach
Zbiór wartości X: S_X={0,1,2,3}, P(X)=(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)
Zdarzenie ze względu na S_X: A_X – liczba orłów w trzech rzutach jest parzysta: {0,2}
$P(A_X)$=1/8+3/8=1/2
Czyli zdarzenie „wypadła parzysta liczba orłów" jest równoważne w tym eksperymencie zdarzeniu „liczba orłów wynosiła 0 lub 2"

16

Zmienna losowa i funkcje ją opisujące



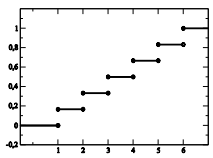
17

Dystrybuanta

- **Dystrybuantą** zmiennej losowej X nazywamy funkcję dającą prawdopodobieństwo otrzymania wartości zmiennej losowej mniejszej bądź równej od danej wartości x:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

- Przykład: Dystrybuanta w rzucie kostką



18