

Poprzednim razem

Wielowymiarowe zmienne losowe

- Łączny rozkład prawdopodobieństwa $P_{X,Y}(x_i, y_j)$
- Brzegowy rozkład prawdopodobieństwa $P_X(x_i) = \sum_j P_{X,Y}(x_i, y_j)$
- Łączna dystrybuenta $F_{X,Y}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P_{X,Y}(x_i, y_j)$
- Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv$$
- Brzegowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, v) dv$$

1

Wektor losowy – przypadek $n > 2$

- Syt.: dany jest n -wymiarowy wektor losowy $\vec{X}$, z którego tworzymy wielowymiarową zmienną losową $\vec{Y}$:
 $\vec{Y} = \vec{Y}(\vec{X})$

rozwijamy wokół $Y = E(X)$, zostawiając człony liniowe

$$Y_i = Y_i(E(\vec{X})) + \sum_j \left(\frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} (X_j - E(X_j)) + \dots$$

$$Y_i - E(Y_i) = \sum_j \left(\frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} (X_j - E(X_j))$$

2

Prawo przenoszenia błędów

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_k, Y_q) &= E[(Y_k - E(Y_k))(Y_q - E(Y_q))] = \\ &= E \left[\sum_i \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_i} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} (X_i - E(X_i)) \sum_m \left(\frac{\partial Y_q}{\partial X_m} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} (X_m - E(X_m)) \right] = \\ &= \sum_{i,m} \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_i} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \left(\frac{\partial Y_q}{\partial X_m} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} E[(X_i - E(X_i))(X_m - E(X_m))] = \\ &= \sum_{i,m} \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_i} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \left(\frac{\partial Y_q}{\partial X_m} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \text{cov}(X_i, X_m) \\ [C(X)]_{k,m} &= \text{cov}(X_i, X_m); \quad [C(Y)]_{k,q} = \text{cov}(Y_k, Y_q); \quad T_{i,j} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \\ [C(Y)]_{k,q} &= \sum_{i,m} T_{k,i} T_{q,m} [C(X)]_{i,m} = \sum_{i,m} T_{k,i} [C(X)]_{i,m} T_{m,q}^T \\ C(Y) &= TC(X)T^T \quad \leftarrow \text{macierzowo} \end{aligned}$$

3

Prawo przenoszenia błędów - przykład

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_k, Y_q) &= \sum_{i,m} \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_i} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \left(\frac{\partial Y_q}{\partial X_m} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \text{cov}(X_i, X_m) \\ \text{Zał.: } Y_k \text{ (nowa zmienna) zależy od } X_1, \dots, X_n \text{ (stare zmienne).} \\ \text{Dokonyjemy pomiaru wszystkich } X_i \text{ otrzymując } E(X_i) \text{ oraz } \sigma(X_i) \\ \sigma(Y_k) &= \sqrt{\text{var}(Y_k)} = \sqrt{\text{cov}(Y_k, Y_k)} = \sqrt{\sum_{i,m} \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_i} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_m} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \text{cov}(X_i, X_m)} = \dots \\ X_i \text{ i } X_n \text{ niezależne} &\rightarrow \text{cov}(X_i, X_n) = 0 \\ \dots &= \sqrt{\sum_i \left(\left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_i} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \right)^2 \text{cov}(X_i, X_i)} = \sqrt{\sum_i \left(\left(\frac{\partial Y_k}{\partial X_i} \right)_{\vec{X}=E(\vec{X})} \right)^2 (\sigma(X_i))^2} \end{aligned}$$

4

Transformacje wektorów losowych

- Syt. $\vec{Z} = g(\vec{X})$
- Przypadek dyskretny: grupujemy te wartości $\vec{X}$, które dają te same wartości $\vec{Z}$ i dodajemy prawdopodobieństwa. Otrzymujemy rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego $\vec{Z}$.
- Przypadek ciągły:
 I sposób: (zał. Z jest jednowymiarowe czyli $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$)

$$F_Z(z) = \int \dots \int_{\substack{\text{po wszystkich zdarzeniach} \\ \text{dla których } Z(A) \leq z}} f_{\vec{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$
 Znajdą dystrybuentę obliczamy (łączną) funkcję gęstości prawdopodobieństwa.
 Dla Z n-wymiarowej całkujemy po wszystkich zdarzeniach dla których $Z_1(A) \leq z_1 \wedge Z_2(A) \leq z_2 \wedge \dots \wedge Z_n(A) \leq z_n$.

5

Transformacje wektorów losowych

- Przypadek ciągły:
 II sposób:
 zał.:
 1. $n=2$ czyli $(X, Y) \rightarrow (V, W)$ czyli $V=g_1(X, Y)$, $W=g_2(X, Y)$
 2. istnieją jednoznaczne funkcje $h_1: X=h_1(V, W)$ i $h_2: Y=h_2(V, W)$
 3. dla każdego x, y funkcje g_1 i g_2 mają ciągłe pochodne cząstkowe
 4. Jacobian

$$J_{(X,Y)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Wtedy

$$f_{V,W}(v, w) = f_{X,Y}(x(v, w), y(v, w)) |J_{(X,Y)}|^{-1}$$

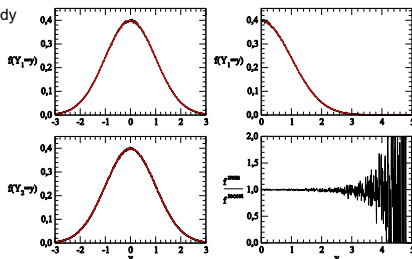
6

Transformacja Box-Mullera

- X_1, X_2 mają rozkłady jednorodne na przedziale $(0,1)$; wtedy

$$Y_1 = \sqrt{-2\ln(X_1)} \cos(2\pi X_2) \quad i \quad Y_2 = \sqrt{-2\ln(X_1)} \sin(2\pi X_2)$$

mają rozkłady $N(0,1)$.



7

Wielowymiarowy rozkład normalny

- Łączna gęstość prawdopodobieństwa

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \left(\frac{\det(K^{-1})}{(2\pi)^n} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T K^{-1}(\vec{x}-\vec{a})}$$

$\vec{X}$ – wektor n zmiennych losowych
 K – macierz kowariancji $n \times n$
 $\vec{a}$ – stały wektor n liczb
 $(E(\vec{X}) = \vec{a})$

- dla $n=2$

$$K^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) \\ \text{cov}(X_1, X_2) & \text{var}(X_2) \end{vmatrix}}} \begin{pmatrix} \text{var}(X_2) & -\text{cov}(X_1, X_2) \\ -\text{cov}(X_1, X_2) & \text{var}(X_1) \end{pmatrix}$$

- Standaryzacja $U_i = \frac{X_i - a_i}{\sigma(X_i)}$ dla $n=2$ prowadzi do

$$f_{\vec{U}}(u_1, u_2) = \left(\frac{\det(K^{-1})}{(2\pi)^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\vec{u}^T K^{-1}\vec{u}}$$

ρ to współczynnik korelacji u_1 i u_2
 $K^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$

8

Wielowymiarowy rozkład normalny - elipsa kowariancji

- Łączna gęstość prawdopodobieństwa

$$f_{\vec{U}}(u_1, u_2) = \text{const} \rightarrow \vec{u}^T K^{-1} \vec{u} = \text{const} \rightarrow$$

$$\frac{1}{1-\rho^2} (u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2 \rho) = \text{const} \rightarrow$$

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{(\sigma(X_1))^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{(\sigma(X_2))^2} - 2\rho \frac{(x_1 - a_1)}{\sigma(X_1)} \frac{(x_2 - a_2)}{\sigma(X_2)} \right) = \text{const}$$

- Jest to równanie elipsy zwanej dla $\text{const}=1$ elipsą kowariancji. Prawdopodobieństwo wystąpienia zmiennych losowych wewnątrz elipsy kowariancji jest niezależne od $\sigma(X_1), \sigma(X_2)$ i ρ .

9