

Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 7  
Informatyka stosowana, wszystkie grupy

1. Wykonano 6 równoczesnych pomiarów wielkości X i Y:

$$X = 1.7, 1.2, 0.6, 1.4, 1.3, 1.0$$

$$Y = 1.4, 1.0, 0.5, 1.4, 2.1, 1.3$$

- (a) Oszacuj punktowo wartość oczekiwaną  $E(X)$  i  $E(Y)$
  - (b) Oszacuj punktowo odchylenia standardowe  $\sigma(X)$  i  $\sigma(Y)$ .
  - (c) Oszacuj kowariancję  $\text{cov}(X, Y)$  i współczynnik korelacji  $\rho(X, Y)$  dla wielkości X i Y.
  - (d) Obliczając kolejne pary dla zmiennych  $A = X - 2Y$  i  $B = X^2 + Y^2$  oszacować punktowo wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i kowariancję zmiennych A i B.
  - (e) Stosując wzory na przenoszenie błędów oszacuj wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i kowariancję zmiennych  $A = X - 2Y$  i  $B = X^2 + Y^2$ .
2. W  $n=8$  niezależnych pomiarach pewnej wielkości X (o nieznanym parametrach rozkładu) otrzymano następujące wyniki estymatorów wartości oczekiwanej i wariancji:

$$T(E(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 2.0$$

oraz

$$T(\sigma^2(X)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 5.05$$

- a) Podaj przedział ufności dla  $E(X)$  przy poziomie ufności 0.95
- b) Podaj przedział ufności dla wariancji  $\sigma^2(X)$  i odchylenia standardowego  $\sigma(X)$  przy poziomie ufności 0.95.
- c) Podaj przedział ufności dla  $E(X)$  przy poziomie ufności 0.95, gdyby znana była informacja, że  $\sigma^2(X)=4.8$ .

*Wskazówka:* Przedział ufności dla wariancji można wyprowadzić bazując na fakcie, że zmienna losowa

$$Y \equiv \frac{(n-1)S^2(X)}{\text{var}(X)}$$

ma rozkład  $\chi^2$  o  $n-1$  stopniach swobody.  $S^2(X) \equiv T(\sigma^2(X)) \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

3. Zauważono, że w próbie 15 pacjentów pewna choroba zakaźna powoduje wystąpienie objawów średnio po 10.37 dniach (z estymatorem wariancji  $S^2(X) = 3.5$ ) od momentu zakażenia. Zakładając normalny rozkład pojawiania się objawów, proszę:
- (a) wyznaczyć przedział ufności dla wartości oczekiwanej czasu wystąpienia objawów na poziomie ufności 0.95,
  - (b) wyznaczyć przedział ufności dla wariancji czasu wystąpienia objawów na poziomie ufności 0.95,
  - (c) powtórzyć powyższe obliczenia na poziomie ufności 0.9999,